ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2026-27
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Ενδεικτικές Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1

Πόσοι δυνατοί κωδικοί 7 χαρακτήρων μπορούν να δημιουργηθούν εάν:

(α) Χρησιμοποιούμε μόνο κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου και το ίδιο γράμμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί πολλές φορές.

(β) Χρησιμοποιούμε μόνο κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου, όλα διαφορετικά μεταξύ τους.

(γ) Χρησιμοποιούμε μόνο κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου και ψηφία.

(δ) Χρησιμοποιούμε μόνο το γράμμα Κ και το ψηφίο 2.

(ε) Χρησιμοποιήσουμε μόνο τα γράμματα Κ και 2 και τα περιλάβουμε και τα δύο.

Λύση:
Το ελληνικό αλφάβητο έχει 24 κεφαλαία γράμματα. Τα ψηφία είναι 10 (από 0 έως 9).

(α) Μόνο κεφαλαία γράμματα, με επαναλήψεις: Για κάθε μία από τις 7 θέσεις του κωδικού, έχουμε 24 επιλογές (ένα από τα 24 κεφαλαία ελληνικά γράμματα). Εφόσον επιτρέπονται οι επαναλήψεις, ο αριθμός των δυνατών κωδικών είναι:

$$24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 = 24^7 = 4.586.471.424.$$

(β) Μόνο κεφαλαία γράμματα, όλα διαφορετικά μεταξύ τους: Για κάθε μία από τις 7 θέσεις του κωδικού, επιλέγουμε ένα διαφορετικό κεφαλαίο ελληνικό γράμμα από τα 24 διαθέσιμα. Επειδή η σειρά έχει σημασία και δεν επιτρέπονται επαναλήψεις, πρόκειται για διατάξεις (μεταθέσεις) 7 αντικειμένων από 24:

$$\begin{aligned} P(24,7) &= \frac{24!}{(24-7)!} = \frac{24!}{17!} \\ &= 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 = 1.744.364.160 \end{aligned}$$

(γ) Κεφαλαία γράμματα και ψηφία, με επαναλήψεις: Το σύνολο των διαθέσιμων χαρακτήρων είναι τα 24 κεφαλαία ελληνικά γράμματα συν τα 10 ψηφία, δηλαδή $24 + 10 = 34$ χαρακτήρες. Εφόσον επιτρέπονται οι επαναλήψεις, για κάθε μία από τις 7 θέσεις του κωδικού, έχουμε 34 επιλογές. Ο αριθμός των δυνατών κωδικών είναι:

$$34^7 = 52.523.350.144$$

(δ) Μόνο το γράμμα Κ και το ψηφίο 2: Έχουμε μόνο 2 διαθέσιμους χαρακτήρες: το γράμμα Κ και το ψηφίο 2. Εφόσον επιτρέπονται οι επαναλήψεις, για κάθε μία από τις 7 θέσεις του κωδικού, έχουμε 2 επιλογές. Ο αριθμός των δυνατών κωδικών είναι:

$$2^7 = 128$$

(ε) Μόνο τα γράμματα Κ και 2 και τα περιλάβουμε και τα δύο: Από το ερώτημα (δ), γνωρίζουμε ότι υπάρχουν $2^7 = 128$ κωδικοί που χρησιμοποιούν μόνο τα γράμματα Κ και 2, με επαναλήψεις. Από αυτούς, πρέπει να αφαιρέσουμε τους κωδικούς που περιέχουν ΜΟΝΟ το γράμμα Κ (δηλαδή 7 φορές Κ: ΚΚΚΚΚΚΚ) και τους κωδικούς που περιέχουν ΜΟΝΟ το ψηφίο 2 (δηλαδή 7 φορές 2: 2222222). Υπάρχει 1 τέτοιος κωδικός για το Κ και 1 για το 2. Άρα, ο αριθμός των κωδικών που περιέχουν Κ και 2 και τα περιλαμβάνουν και τα δύο είναι:

$$2^7 - 1 - 1 = 128 - 2 = 126$$

Άσκηση 2

Ένα άτομο έχει 8 φίλους, 5 από τους οποίους θέλει να καλέσει σε ένα πάρτι. Πόσες επιλογές έχει, αν:

(α) 2 από τους φίλους του έχουν μαλώσει, και δεν γίνεται να προσκληθούν συγχρόνως;

(β) 2 από τους φίλους του είναι ζευγάρι, και πρέπει να προσκληθούν συγχρόνως;

Λύση:

(α) Εδώ έχουμε δύο περιπτώσεις, αν 2 άτομα δε γίνεται να προσκληθούν συγχρόνως : είτε δε θα προσκληθεί κανένας από τους 2, είτε θα προσκληθεί μόνο 1 εκ των 2.

Στη συνέχεια, το σύνολο των ατόμων χωρίζεται σε 2 υποσύνολα: το ένα περιέχει τα 2 άτομα που έχουν μαλώσει, και το άλλο τα εναπομείναντα 6 από τα συνολικά 8 ατομα.

Στην πρώτη περίπτωση, το άτομο δεν θα καλέσει κανέναν από τους 2, διαλέγοντας 0 άτομα από το υποσύνολο των 2, και θα καλέσει και τα 5 άτομα από το υποσύνολο των 6.

Στη δεύτερη περίπτωση, το άτομο θα καλέσει 1 εκ των 2, διαλέγοντας 1 άτομο από το υποσύνολο των 2, και θα καλέσει τα υπόλοιπα 4 άτομα από το υποσύνολο των 6.

Οπότε, τελικά το συνολικό πλήθος των επιλογών του ατόμου που θέλει να κάνει το πάρτι είναι :

$$\begin{aligned} C(2,0) \times C(6,5) + C(2,1) \times C(6,4) &= \binom{2}{0} \times \binom{6}{5} + \binom{2}{1} \times \binom{6}{4} \\ &= \binom{6}{5} + 2 \times \binom{6}{4} \end{aligned}$$

(β) Εδώ έχουμε δύο περιπτώσεις, αν 2 άτομα είναι ζευγάρι και πρέπει να προσκληθούν συγχρόνως : είτε δε θα προσκληθεί κανένας από τους 2, είτε θα προσκληθούν και οι 2.

Στη συνέχεια, το σύνολο των ατόμων χωρίζεται σε 2 υποσύνολα : το ένα περιέχει τα 2 άτομα που είναι ζευγάρι, και το άλλο τα εναπομείναντα 6 από τα συνολικά 8 ατομα.

Στην πρώτη περίπτωση, το άτομο δεν θα καλέσει κανέναν από τους 2, διαλέγοντας 0 άτομα από το υποσύνολο των 2, και θα καλέσει και τα 5 άτομα από το υποσύνολο των 6.

Στη δεύτερη περίπτωση, το άτομο θα καλέσει και τους 2, διαλέγοντας και τα 2 άτομα από το υποσύνολο των 2, και θα καλέσει τα υπόλοιπα 3 άτομα από το υποσύνολο των 6.

Οπότε, τελικά το συνολικό πλήθος των επιλογών του ατόμου που θέλει να κάνει το πάρτι είναι :

$$\begin{aligned} C(2,0) \times C(6,5) + C(2,2) \times C(6,3) &= \binom{2}{0} \times \binom{6}{5} + \binom{2}{2} \times \binom{6}{3} \\ &= \binom{6}{5} + \binom{6}{3} \end{aligned}$$

Άσκηση 3

Το μάθημα των Πιθανοτήτων παρακολουθούν 100 φοιτητές, εκ των οποίων 40 είναι αγόρια και οι υπόλοιποι είναι κορίτσια. Για την καλύτερη δυνατή προετοιμασία τους εν όψει της εξέτασης του μαθήματος, σχεδιάζουν να διαβάσουν σε ομάδες εργασίας.

(α) Αν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής, με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί μια 5-μελής ομάδα εργασίας;

(β) Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί μια 5-μελής ομάδα εργασίας, αν πρέπει να υπάρχουν σε αυτή 2 αγόρια και 3 κορίτσια;

(γ) Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί μια 5-μελής ομάδα εργασίας, αν πρέπει να υπάρχουν σε αυτή 4 αγόρια και 1 κορίτσι;

(δ) Ποια η πιθανότητα να επιλέξουμε μόνο αγόρια;

Λύση:

(α) Επιλέγοντας 5 φοιτητές από 100, εφ' όσον δε μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής, για να συγκροτήσουμε μια πενταμελή ομάδα εργασίας υπάρχουν :

$$\begin{aligned} C(100,5) &= \binom{100}{5} = \frac{100!}{5!(100-5)!} \\ &= \frac{100\times 99\times 98\times 97\times 96\times 95!}{5!95!} = 75.287.520 \end{aligned}$$

δυνατές πεντάδες που μπορούμε να επιλέξουμε.

(β) Ορίζουμε τον δειγματικό χώρο Ω ως το σύνολο όλων των δυνατών μη-διατεταγμένων επιλογών 5 ατόμων από 100 (εφόσον σε αυτό το πρόβλημα δε μας απασχολεί η σειρά με την οποία επιλέγονται). Όπως είδαμε στο α) ερώτημα, $N(\Omega) = C(100,5) = 75.287.520$. Ορίζουμε το ενδεχόμενο :

$A = \{$όλες οι πενταμελείς ομάδες εργασίας που αποτελούνται από 2 αγόρια και 3 κορίτσια$\}$

Θα υπολογίσουμε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου A ως εξής :

Παρατηρούμε ότι το πείραμα μπορεί να χωριστεί σε 2 μέρη : την επιλογή των αγοριών και αυτή των κοριτσιών. Από τα 40 αγόρια μπορούμε να επιλέξουμε 2 με $C(40,2) = \binom{40}{2}$ τρόπους, και αντίστοιχα από τα 60 κορίτσια μπορούμε να επιλέξουμε 3 με $C(60,3) = \binom{60}{3}$ τρόπους. 'Αρα, ο συνδυασμός αυτών των δύο επιλογών βάσει της Πολλαπλασιαστικής Αρχής έχει

$$\begin{aligned} N(A) &= \binom{40}{2}\binom{60}{3} = \frac{40!60!}{2!38!3!57!} \\ &= \frac{40\times 39\times 60\times 59\times 58}{2\times 3\times 2} = 26.691.600 \end{aligned}$$

δυνατά αποτελέσματα.

(γ) Ακολουθώντας παρόμοια συλλογιστική με πριν, ορίζουμε το ενδεχόμενο :

$B = \{$όλες οι πενταμελείς ομάδες εργασίας που αποτελούνται από 4 αγόρια και 1 κορίτσι$\}$

Θα υπολογίσουμε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου B ως εξής :

Παρατηρούμε ότι ξανά το πείραμα μπορεί να χωριστεί σε 2 μέρη : την επιλογή των αγοριών και αυτή των κοριτσιών. Από τα 40 αγόρια μπορούμε να επιλέξουμε 4 με $C(40,4) = \binom{40}{4}$ τρόπους, και αντίστοιχα από τα 60 κορίτσια μπορούμε να επιλέξουμε 1 με $C(60,1) = \binom{60}{1}$ τρόπους. Άρα, ο συνδυασμός αυτών των δύο επιλογών βάσει της Πολλαπλασιαστικής Αρχής έχει

$$N(B) = \binom{40}{4}\binom{60}{1} = \frac{40!60!}{4!36!1!59!} = \cdots = 5.483.400$$

δυνατά αποτελέσματα.

(δ) Ακολουθώντας παρόμοια συλλογιστική όπως και στα προηγούμενα ερωτήματα τις άσκησης, ορίζουμε το ενδεχόμενο :

Γ = {όλες οι πενταμελείς ομάδες εργασίας που αποτελούνται μόνο από αγόρια}

Θα υπολογίσουμε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου Γ ως εξής :

Από τα 40 αγόρια μπορούμε να επιλέξουμε 5 με $C(40,5) = \binom{40}{5}$ τρόπους. Παρατηρείστε ότι πλέον δεν χρειάζεται να εφαρμόσουμε την Πολλαπλασιαστική Αρχή όπως πριν, καθώς το πλήθος των τρόπων να μην επιλέξουμε κανένα κορίτσι από τα 60 για την πενταμελή ομάδα εργασίας είναι $C(60,0) = \binom{60}{0} = \frac{60!}{0!60!} = 1$. Ως εκ τούτου

$$N(\Gamma) = \binom{40}{5} = \frac{40!}{5!35!} = \cdots = 658.008$$

Αφού η επιλογή θεωρούμε ότι γίνεται 'εντελώς τυχαία', η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι :

$$P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{658.008}{75.287.520} = \cdots = 0.0087.$$

Άσκηση 4

Ρίχνουμε 3 τίμια κέρματα. Έστω X η τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) που δείχνει πόσες φορές εμφανίστηκε κορώνα. Να βρεθούν οι τιμές που παίρνει η τ.μ. X και να υπολογιστεί η Συνάρτηση Πιθανότητας (Μάζας) (PMF), $p_X(x)$, αυτής. Αποδείξτε ότι η $p_X(x)$ είναι μία έγκυρη Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας.

Λύση:
Έστω τα ενδεχόμενα: $K = \{\text{έρχεται κορώνα}\}$ και $\Gamma = \{\text{έρχεται γράμματα}\}$.
Τα κέρματα είναι τίμια, άρα $P(K) = \frac{1}{2}$ και $P(\Gamma) = \frac{1}{2}$.
Η τ.μ. X λαμβάνει τις τιμές $x = 0, 1, 2, 3$, καθώς μπορεί να εμφανιστεί κορώνα από $0 - 3$ φορές συνολικά.
Βρίσκουμε λοιπόν αναλυτικά:

- $p_X(0) = P(X = 0) = P(\Gamma\Gamma\Gamma) = P(\Gamma) \cdot P(\Gamma) \cdot P(\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
- $p_X(1) = P(X = 1) = P(K\Gamma\Gamma) + P(\Gamma K\Gamma) + P(\Gamma\Gamma K) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
- $p_X(2) = P(X = 2) = P(KK\Gamma) + P(K\Gamma K) + P(\Gamma KK) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
- $p_X(3) = P(X = 3) = P(KKK) = P(K) \cdot P(K) \cdot P(K) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

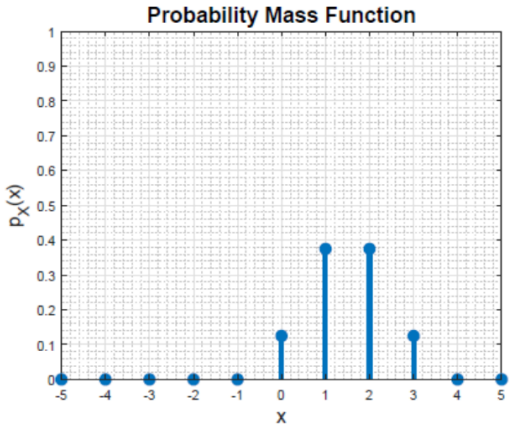
Άρα, η Συνάρτηση Πιθανότητας (Μάζας) θα είναι:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & x = 0, 3 \\ \frac{3}{8}, & x = 1, 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Η $p_X(x)$ είναι μία έγκυρη Συνάρτηση Πιθανότητας (Μάζας), καθώς ισχύει ότι:

$$\sum_x p_X(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

Η γραφική της παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα $[-5, 5]$) φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Συνάρτηση Πιθανότητας (Μάζας) $p_X(x)$.

Άσκηση 5

Ένα δυαδικό δέντρο αναζήτησης (Binary Search Tree - BST) είναι μία δομή δεδομένων στην οποία, για κάθε κόμβο, οι τιμές στο αριστερό υποδέντρο είναι μικρότερες και οι τιμές στο δεξί υποδέντρο είναι μεγαλύτερες από την τιμή του κόμβου. Ένα δυαδικό δέντρο αναζήτησης ονομάζεται πλήρως εκφυλισμένο completely degenerate όταν κάθε κόμβος έχει το πολύ ένα παιδί. Θεωρούμε ότι εισάγουμε τους ακέραιους αριθμούς $1, 2, \ldots, n$ σε ένα αρχικά κενό δυαδικό δέντρο αναζήτησης, με τυχαία σειρά. Υποθέτουμε ότι όλες οι δυνατές σειρές εισαγωγής είναι ισοπίθανες.

(α) Να υπολογίσετε, ως συνάρτηση του n, την πιθανότητα το δέντρο που θα προκύψει να είναι completely degenerate.

(β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του (α), να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του n για την οποία η πιθανότητα σχηματισμού ενός completely degenerate δέντρου είναι μικρότερη από 0.01 (δηλαδή 1%).

Λύση:

(α) Αρχικά, υπολογίζουμε το συνολικό πλήθος των δυνατών σειρών εισαγωγής των n διαφορετικών ακεραίων στο δέντρο.

Εφόσον κάθε αριθμός εισάγεται ακριβώς μία φορά και μας ενδιαφέρει η σειρά εισαγωγής:

$$|\Omega| = P(n, n) = n!.$$

Έστω A το ενδεχόμενο το δυαδικό δέντρο αναζήτησης να είναι completely degenerate, δηλαδή κάθε κόμβος να έχει το πολύ ένα παιδί.

Για να συμβεί το ενδεχόμενο A, κάθε φορά που εισάγουμε έναν αριθμό, πρέπει να εξασφαλίζουμε ότι δεν δημιουργούνται δύο παιδιά στον ίδιο κόμβο.

Συγκεκριμένα:

- Ο πρώτος αριθμός που εισάγεται αποτελεί τη ρίζα του δέντρου. Για να μην αποκτήσει η ρίζα δύο παιδιά, πρέπει να είναι είτε ο μικρότερος είτε ο μεγαλύτερος από τους n αριθμούς. Επομένως, έχουμε 2 επιλογές.
- Στη συνέχεια, απομένουν $n - 1$ αριθμοί. Για να διατηρηθεί η εκφυλισμένη δομή, ο επόμενος αριθμός πρέπει και πάλι να είναι είτε ο μικρότερος είτε ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς που απομένουν. Άρα, έχουμε 2 επιλογές.
- Με ανάλογο τρόπο συνεχίζεται η διαδικασία για τους υπόλοιπους αριθμούς. Όταν απομένει μόνο ένας αριθμός, η επιλογή του είναι υποχρεωτική.

Επομένως, για τις πρώτες $n-1$ εισαγωγές έχουμε 2 επιλογές κάθε φορά, ενώ για την τελευταία έχουμε μόνο 1 επιλογή.

Το πλήθος των σειρών εισαγωγής είναι:

$$|A| = \underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n-1 \text{ φορές}} \cdot 1 = 2^{n-1}.$$

Εφόσον όλες οι δυνατές σειρές εισαγωγής είναι ισοπίθανες, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2^{n-1}}{n!}.$$

(β) Από το ερώτημα (α), η πιθανότητα σχηματισμού ενός completely degenerate δέντρου είναι:

$$P(A) = \frac{2^{n-1}}{n!}.$$

Ζητάμε την ελάχιστη ακέραια τιμή του n για την οποία:

$$P(A) < 0.01 \Rightarrow \frac{2^{n-1}}{n!} < 0.01.$$

Παρατηρούμε ότι, για $n \geq 2$, η πιθανότητα μειώνεται καθώς αυξάνεται το n, αφού:

$$\frac{P_{n+1}(A)}{P_n(A)} = \frac{2^n}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^{n-1}} = \frac{2}{n+1} < 1.$$

Επομένως, εξετάζουμε διαδοχικές τιμές του n μέχρι η πιθανότητα να γίνει μικρότερη από 0.01.

Για $n = 7$, έχουμε:

$$P_7(A) = \frac{2^6}{7!} = \frac{64}{5040} \approx 0.0127 > 0.01.$$

Για $n = 8$, έχουμε:

$$P_8(A) = \frac{2^7}{8!} = \frac{128}{40320} \approx 0.00317 < 0.01.$$

Άρα, η ελάχιστη τιμή του n για την οποία η πιθανότητα σχηματισμού ενός completely degenerate δέντρου είναι μικρότερη από 1% είναι:

$$n_{\min} = 8.$$

Άσκηση 6

Θεωρούμε το αγγλικό αλφάβητο, το οποίο αποτελείται από 26 διαφορετικά γράμματα. Ονομάζουμε norepeatword μια ακολουθία από τουλάχιστον 1 και το πολύ 26 γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου, στην οποία δεν επιτρέπεται η επανάληψη γραμμάτων. Για παράδειγμα, η λέξη `course` είναι μια τέτοια ακολουθία, ενώ η λέξη `statistics` δεν είναι, καθώς περιέχει επαναλαμβανόμενα γράμματα. Η σειρά των γραμμάτων έχει σημασία. Επομένως, οι ακολουθίες `course` και `source` θεωρούνται διαφορετικές. Δεν είναι απαραίτητο οι ακολουθίες να αποτελούν λέξεις με νόημα.

Επιλέγουμε τυχαία μία από όλες τις δυνατές τέτοιες ακολουθίες, θεωρώντας ότι όλες είναι ισοπίθανες, ανεξάρτητα από το πλήθος των γραμμάτων τους. Να δείξετε ότι η πιθανότητα η επιλεγμένη ακολουθία να περιέχει και τα 26 γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου είναι πολύ κοντά στην τιμή $\frac{1}{e}$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το ανάπτυγμα Taylor της εκθετικής συνάρτησης:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Λύση:
Έστω A το ενδεχόμενο η επιλεγμένη ακολουθία να περιέχει και τα 26 γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου. Αρχικά, υπολογίζουμε το πλήθος των αποτελεσμάτων. Εφόσον η ακολουθία πρέπει να περιέχει και τα 26 διαφορετικά γράμματα, χωρίς επανάληψη, και μας ενδιαφέρει η σειρά τους, πρόκειται για μεταθέσεις 26 στοιχείων. Επομένως, το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων είναι:

$$|A| = P(26, 26) = 26!.$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το συνολικό πλήθος των δυνατών ακολουθιών. Επειδή κάθε ακολουθία μπορεί να περιέχει από 1 έως 26 γράμματα, αρχικά θεωρούμε μία ακολουθία με k γράμματα, όπου $1 \leq k \leq 26$.
Για να σχηματίσουμε μία τέτοια ακολουθία:

- Επιλέγουμε k από τα 26 διαφορετικά γράμματα του αλφαβήτου. Επειδή δεν μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής σε αυτό το στάδιο, έχουμε $\binom{26}{k}$ δυνατούς συνδυασμούς.
- Στη συνέχεια, τοποθετούμε τα k επιλεγμένα γράμματα σε μία σειρά. Επειδή όλα τα γράμματα είναι διαφορετικά, έχουμε $k!$ δυνατές μεταθέσεις.

Επομένως, το πλήθος των ακολουθιών με ακριβώς k γράμματα είναι:

$$N_k = \binom{26}{k} \cdot k! = \frac{26!}{k!(26-k)!} \cdot k! = \frac{26!}{(26-k)!}.$$

Επειδή το πλήθος των γραμμάτων μπορεί να είναι $k = 1, 2, \ldots, 26$, το συνολικό πλήθος των δυνατών ακολουθιών προκύπτει από τον κανόνα του αθροίσματος:

$$|\Omega| = \sum_{k=1}^{26} N_k = \sum_{k=1}^{26} \binom{26}{k} k! = \sum_{k=1}^{26} \frac{26!}{(26-k)!}.$$

Εφόσον όλες οι δυνατές ακολουθίες είναι ισοπίθανες, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{26!}{\sum_{k=1}^{26} \binom{26}{k} k!} = \frac{26!}{\sum_{k=1}^{26} \frac{26!}{(26-k)!}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{26} \frac{1}{(26-k)!}}$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{25!} + \frac{1}{24!} + \cdots + \frac{1}{1!} + \frac{1}{0!}}.$$

Από το ανάπτυγμα Taylor της εκθετικής συνάρτησης για $x = 1$, γνωρίζουμε ότι:

$$e^1 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots.$$

Παρατηρούμε ότι ο παρονομαστής της πιθανότητας $P(A)$ αποτελείται από τους πρώτους 26 όρους του παραπάνω αθροίσματος, δηλαδή:

$$\sum_{k=1}^{26} \frac{1}{(26-k)!} = \sum_{j=0}^{25} \frac{1}{j!} \approx e.$$

Η προσέγγιση αυτή είναι εξαιρετικά ακριβής, καθώς η σειρά συγκλίνει πολύ γρήγορα και οι όροι που παραλείπονται είναι πολύ μικροί. Οπότε, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(A) = \frac{1}{\sum_{j=0}^{25} \frac{1}{j!}} \approx \frac{1}{e} \approx 0.3679.$$

Άσκηση 7

Ένα σώμα 3 δικαστών πρέπει να πάρει μία απόφαση υπέρ ή κατά. Η απόφαση παίρνεται κατά πλειοψηφία. Κάθε δικαστής ψηφίζει, μυστικά και ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους, υπέρ με πιθανότητα p.
Ορίζουμε το γεγονός M ότι η απόφαση του σώματος είναι υπέρ (δηλαδή, η πλειοψηφία των δικαστών ψήφισε υπέρ), και το γεγονός A ότι ο πρώτος δικαστής ψήφισε υπέρ.

(α) Τι κατανομή ακολουθεί η τ.μ. X, ο αριθμός των δικαστών που ψηφίζει υπέρ;

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(M)$.

(γ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(M \mid A)$.

Λύση:

(α) Από την εκφώνηση είναι προφανές ότι η τ.μ. X ακολουθεί Διωνυμική κατανομή:

$$X \sim \Delta(n = 3, p).$$

(β) Καθώς το σώμα αποφασίζει κατά πλειοψηφία, η απόφαση είναι 'υπέρ' αν τουλάχιστον 2 στους 3 δικαστές αποφασίσουν 'υπέρ':

$$\begin{aligned} P(M) &= P(X \geq 2) \\ &= P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= \binom{3}{2} p^2 (1-p)^1 + \binom{3}{3} p^3 (1-p)^0 \\ &= 3p^2 - 2p^3. \end{aligned}$$

(γ) Δεδομένου του A, ότι ο πρώτος δικαστής ψήφισε 'υπέρ', η απόφαση του σώματος είναι 'υπέρ' αν ένας τουλάχιστον από τους άλλους δύο δικαστές ψήφισαν 'υπέρ'. Επομένως,

$$\begin{aligned} P(M \mid A) &= \binom{2}{1} p(1-p) + \binom{2}{2} p^2 (1-p)^0 \\ &= 2p(1-p) + p^2 \\ &= 2p - p^2. \end{aligned}$$