ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2026-2027

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

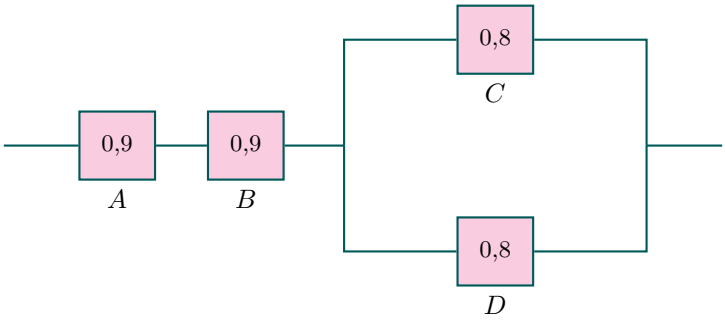
Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1

Ένα ηλεκτρικό σύστημα αποτελείται από 4 εξαρτήματα, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους όπως στο σχήμα 1. Το σύστημα θα λειτουργεί, αν λειτουργούν τα εξαρτήματα A και B και λειτουργεί τουλάχιστον ένα εκ των εξαρτημάτων C και D. Η αξιοπιστία (δηλαδή η πιθανότητα λειτουργίας) κάθε εξαρτήματος δίνεται από το σχήμα. Να υπολογίσετε την πιθανότητα:

α) το σύστημα να λειτουργεί.

β) να μην λειτουργεί το εξάρτημα C, ενώ το σύστημα λειτουργεί.



Σχήμα 1: Ηλεκτρικό σύστημα

Λύση Σύμφωνα με τη διάταξη του σχήματος, τα εξαρτήματα A, B και το υποσύστημα των C και D αποτελούν ένα εν σειρά κύκλω,α, ενώ το υποσύστημα των εξαρτημάτων C και D αποτελεί μια σύνδεση εν παραλλήλω.

α) Η πιθανότητα λειτουργίας του συστήματος είναι ίση με:

$$\begin{aligned} PA \cap B \cap (C \cup D) &= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C \cup D) = P(A) \cdot P(B) \cdot [1 - P(C^c \cap D^c)] \\ &= P(A) \cdot P(B) \cdot [1 - P(C^c) \cdot P(D^c)] \\ &= (0.,9)(0,9)[1 - (1 - 0,8)(1 - 0,8)] \\ &= 0,7776 \end{aligned}$$

Η παραπάνω ισότητα ισχύει, επειδή τα τέσσερα εξαρτήματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

β) Η δεσμευμένη πιθανότητα υπολογίζεται ως εξής:

$$P = \frac{P[\text{το σύστημα λειτουργεί, αλλά το εξάρτημα } C \text{ δε λειτουργεί}]}{P[\text{το σύστημα λειτουργεί}]}$$

$$= \frac{P(A \cap B \cap C^c \cap D)}{P[\text{το σύστημα λειτουργεί}]}$$

$$= \frac{(0,9)(0,9)(1-0,8)(0,8)}{0,7776} = 0,1667$$

Άσκηση 2

i) Ένα κουτί περιέχει 15 κόκκινες και 5 άσπρες μπάλες. Επιλέγουμε τυχαία 2 μπάλες, χωρίς επανάθεση. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

   α) Και οι 2 επιλεγμένες μπάλες είναι άσπρες.

   β) Η 1η επιλεγμένη μπάλα είναι κόκκινη και η 2η επιλεγμένη μπάλα είναι άσπρη.

ii) Ένα στα 1000 άτομα ενός πληθυσμού πάσχει από μία ασθένεια. Η εξέταση που πραγματοποιείται για τη διάγνωση της ασθένειας δίνει λάθος διάγνωση στο 1% των περιπτώσεων, αν το άτομο που υποβάλλεται στην εξέταση πάσχει όντως από την ασθένεια, και στο 2%, αν το άτομο που υποβάλλεται στην εξέταση δεν πάσχει από την ασθένεια.

   α) Να βρεθεί η πιθανότητα θετικού αποτελέσματος εξέτασης σε κάποιο άτομο του πληθυσμού.

   β) Αν για κάποιο άτομο του πληθυσμού η εξέταση ήταν θετική, να υπολογιστεί η πιθανότητα αυτό να πάσχει πράγματι από την ασθένεια.

Λύση

i) Το κουτί περιέχει 15 κόκκινες μπάλες και 5 άσπρες μπάλες (συνολικά 20 μπάλες).

   (α) Έστω A_1 το ενδεχόμενο η 1η μπάλα να είναι άσπρη. Τότε:

$$P(A_1) = \frac{5}{20}$$

   Δεδομένου ότι η 1η μπάλα είναι άσπρη, στο κουτί απομένουν 19 μπάλες, εκ των οποίων οι 4 είναι άσπρες. Η πιθανότητα η 2η μπάλα να είναι άσπρη (A_2) είναι:

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{4}{19}$$

   Χρησιμοποιώντας τον Πολλαπλασιαστικό Νόμο, η πιθανότητα ότι και οι 2 μπάλες που επιλέγονται τυχαία είναι άσπρες θα είναι ίση με:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_1) = \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} = \frac{1}{19}$$

   (β) Έστω $P(K_1)$ η πιθανότητα η 1η μπάλα να είναι κόκκινη. Τότε:

$$P(K_1) = \frac{15}{20}$$

   Δεδομένου ότι η 1η μπάλα είναι κόκκινη, απομένουν 19 μπάλες, εκ των οποίων οι 5 είναι άσπρες. Η πιθανότητα ότι η 2η μπάλα που επιλέγεται τυχαία είναι άσπρη είναι η ακόλουθη:

$$P(A_2 \mid K_1) = \frac{5}{19}$$

   Χρησιμοποιώντας τον Πολλαπλασιαστικό Νόμο, η πιθανότητα ότι η 1η μπάλα είναι κόκκινη και η 2η άσπρη α είναι ίση με:

$$P(K_1 \cap A_2) = P(A_2 \mid K_1) \cdot P(K_1) = \frac{5}{19} \cdot \frac{15}{20} = \frac{15}{76}$$

1. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

   - A: Το αποτέλεσμα της εξέτασης είναι αρνητικό.
   - Θ: Το αποτέλεσμα της εξέτασης είναι θετικό.
   - B: Ένα τυχαίο άτομο του πληθυσμού πάσχει από την ασθένεια.

   Τότε ξέρουμε ότι:

   - $P(B) = \frac{1}{1000} = 0{,}001 \quad$ και $\quad P(B^c) = \frac{999}{1000} = 0{,}999$
   - $P(A \mid B) = 0{,}01 \implies P(\Theta \mid B) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$
   - $P(\Theta \mid B^c) = 0{,}02 \implies P(A \mid B^c) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$

   (α) Σύμφωνα με το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας, η πιθανότητα το αποτέλεσμα της εξέτασης να είναι θετικό ισούται με:

   $$\begin{aligned} P(\Theta) &= P(\Theta \mid B) \cdot P(B) + P(\Theta \mid B^c) \cdot P(B^c) \\ &= 0{,}99 \cdot 0{,}001 + 0{,}02 \cdot 0{,}999 \\ &= 0{,}00099 + 0{,}01998 = 0{,}02097 \end{aligned}$$

   (β) Σύμφωνα με τον Κανόνα του Bayes, αν το αποτέλεσμα της εξέτασης είναι ετικό, η πιθανότητα να πάσχει πράγματι το άτομο από την ασθένεια α είναι:

   $$\begin{aligned} P(B \mid \Theta) &= \frac{P(\Theta \mid B) \cdot P(B)}{P(\Theta \mid B) + P(\Theta \mid B^c) \cdot P(B^c)} \\ &= \frac{P(\Theta \mid B) \cdot P(B)}{P(\Theta)} \\ &= \frac{0{,}99 \cdot 0{,}001}{0{,}02097} \\ &= \frac{0{,}00099}{0{,}02097} \approx 0{,}0472 \end{aligned}$$

Άσκηση 3

Ένα ψηφιακό σύστημα επικοινωνίας μεταδίδει δυαδικά ψηφία (0 ή 1) μέσω ενός συμμετρικού θορυβώδους καναλιού. Κάθε μπιτ μεταδίδεται λανθασμένα με πιθανότητα $p = 0{,}08$, ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα μπιτ. Ο πομπός εκπέμπει το σύμβολο 0 με πιθανότητα 0,6 και το σύμβολο 1 με πιθανότητα 0,4. Για να μειωθεί η πιθανότητα σφάλματος, κάθε μπιτ αποστέλλεται 3 φορές (δηλαδή το 0 στέλνεται ως 000 και το 1 ως 111) και ο δέκτης αποκωδικοποιεί κατά πλειοψηφία (αποφασίζει 0 αν λάβει τουλάχιστον δύο μηδενικά, και 1 αν λάβει τουλάχιστον δύο μονάδες).

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ένα μπιτ 0 να αποκωδικοποιηθεί λανθασμένα ως 1.

β) Να υπολογίσετε τη συνολική πιθανότητα σφάλματος αποκωδικοποίησης ενός τυχαία επιλεγμένου μπιτ που εκπέμπεται από την πηγή.

γ) Εάν ο δέκτης λαμβάνει την ακολουθία 010, ποια είναι η πιθανότητα να είχε σταλεί πράγματι το σύμβολο 0;

Λύση

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

- S_0: Εκπέμπεται το σύμβολο 0 (ως ακολουθία 000), με $P(S_0) = 0{,}6$.
- S_1: Εκπέμπεται το σύμβολο 1 (ως ακολουθία 111), με $P(S_1) = 0{,}4$.

Τα ενδεχόμενα S_0 και S_1 αποτελούν διαμέριση του δειγματικού χώρου. Επειδή τα μπιτ μεταδίδονται ανεξάρτητα, κάθε μεμονωμένο μπιτ μεταδίδεται λανθασμένα με πιθανότητα $p = 0{,}08$ και σωστά με πιθανότητα $1 - p = 0{,}92$.

α) Έστω E το ενδεχόμενο να συμβεί σφάλμα αποκωδικοποίησης. Δεδομένου ότι εκπέμφθηκε το σύμβολο 0 (ακολουθία 000), ο δέκτης θα αποφασίσει λανθασμένα 1 αν και μόνο αν λάβει τουλάχιστον δύο μονάδες (1), δηλαδή μία από τις ακολουθίες $110, 101, 011$ ή 111.

Λόγω της ανεξαρτησίας των μεταδόσεων των μπιτ:

$$P(110 \mid S_0) = P(101 \mid S_0) = P(011 \mid S_0) = p^2(1-p) = (0{,}08)^2 \cdot 0{,}92 = 0{,}005888$$

$$P(111 \mid S_0) = p^3 = (0{,}08)^3 = 0{,}000512$$

Επομένως, η δεσμευμένη πιθανότητα σφάλματος ισούται με:

$$\begin{aligned} P(E \mid S_0) &= 3p^2(1-p) + p^3 \\ &= 3 \cdot 0{,}005888 + 0{,}000512 \\ &= 0{,}017664 + 0{,}000512 = 0{,}018176 \end{aligned}$$

β) Λόγω της συμμετρίας του καναλιού, αν εκπεμφθεί το σύμβολο 1 (ακολουθία 111), σφάλμα συμβαίνει αν ληφθούν τουλάχιστον δύο μηδενικά $(001, 010, 100, 000)$. Συνεπώς:

$$P(E \mid S_1) = 3p^2(1-p) + p^3 = 0{,}018176$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας, η συνολική πιθανότητα σφάλματος είναι:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \mid S_0)P(S_0) + P(E \mid S_1)P(S_1) \\ &= 0{,}018176 \cdot 0{,}6 + 0{,}018176 \cdot 0{,}4 \\ &= 0{,}018176 \cdot (0{,}6 + 0{,}4) = 0{,}018176 \end{aligned}$$

γ) Έστω R_{010} το ενδεχόμενο ο δέκτης να λάβει την ακολουθία 010.

- Αν είχε σταλεί το σύμβολο 0 (ακολουθία 000):

$$P(R_{010} \mid S_0) = (1-p) \cdot p \cdot (1-p) = p(1-p)^2 = 0{,}08 \cdot (0{,}92)^2 = 0{,}067712$$

- Αν είχε σταλεί το σύμβολο 1 (ακολουθία 111):

$$P(R_{010} \mid S_1) = p \cdot (1-p) \cdot p = p^2(1-p) = (0{,}08)^2 \cdot 0{,}92 = 0{,}005888$$

Σύμφωνα με τον Κανόνα του Bayes, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\begin{aligned} P(S_0 \mid R_{010}) &= \frac{P(R_{010} \mid S_0)P(S_0)}{P(R_{010} \mid S_0)P(S_0) + P(R_{010} \mid S_1)P(S_1)} \\ &= \frac{0{,}067712 \cdot 0{,}6}{0{,}067712 \cdot 0{,}6 + 0{,}005888 \cdot 0{,}4} \\ &= \frac{0{,}0406272}{0{,}0406272 + 0{,}0023552} = \frac{0{,}0406272}{0{,}0429824} \approx 0{,}9452 \end{aligned}$$

Άσκηση 4

Ρίχνουμε δύο δίκαια και ανεξάρτητα τετράεδρα ζάρια (με έδρες $\{1,2,3,4\}$). Ορίζουμε τα ακόλουθα γεγονότα:

- A: Το αποτέλεσμα του πρώτου ζαριού είναι άρτιος αριθμός.
- B: Το αποτέλεσμα του δεύτερου ζαριού είναι άρτιος αριθμός.
- C: Το άθροισμα των αποτελεσμάτων των δύο ζαριών είναι άρτιος αριθμός.

α) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$ και $P(C)$.

β) Να εξετάσετε αν τα γεγονότα A, B και C είναι ανά δύο ανεξάρτητα.

γ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A \cap B \cap C)$ και να δείξετε αν τα γεγονότα A, B, C είναι από κοινού ανεξάρτητα.

Λύση

Ο δειγματικός χώρος του πειράματος αποτελείται από τα 16 ισοπίθανα διατεταγμένα ζεύγη:

$$\Omega = \{(i,j) : i,j \in \{1,2,3,4\}\}, \quad |\Omega| = 16$$

α)

- Το ενδεχόμενο A συμβαίνει όταν το 1ο ζάρι φέρει 2 ή 4, άρα περιέχει 8 στοιχεία:

$$P(A) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

- Το ενδεχόμενο B συμβαίνει όταν το 2ο ζάρι φέρει 2 ή 4, άρα περιέχει 8 στοιχεία:

$$P(B) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

- Το άθροισμα είναι άρτιο όταν είτε και τα δύο ζάρια είναι άρτια είτε και τα δύο είναι περιττά. Υπάρχουν 4 ζεύγη με δύο άρτιους και 4 με δύο περιττούς, δηλαδή 8 στοιχεία:

$$P(C) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

β) Εξετάζουμε την ανεξαρτησία ανά δύο:

- Για τα A και B: Η τομή $A \cap B = \{(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\}$ περιέχει 4 στοιχεία, άρα $P(A \cap B) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$. Επειδή $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B)$, τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα.
- Για τα A και C: Αν το πρώτο ζάρι είναι άρτιο και το άθροισμα άρτιο, τότε αναγκαστικά και το δεύτερο ζάρι είναι άρτιο. Επομένως $A \cap C = A \cap B$, οπότε $P(A \cap C) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$. Επειδή $P(A \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(C)$, τα ενδεχόμενα A και C είναι ανεξάρτητα.
- Για τα B και C: Αντίστοιχα, αν το δεύτερο ζάρι είναι άρτιο και το άθροισμα άρτιο, αναγκαστικά και το πρώτο είναι άρτιο, άρα $B \cap C = A \cap B$, οπότε $P(B \cap C) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$. Επειδή $P(B \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(B)P(C)$, τα ενδεχόμενα B και C είναι ανεξάρτητα.

Συνεπώς, τα ενδεχόμενα A, B και C είναι ανά δύο ανεξάρτητα.

γ) Η τομή και των τριών ενδεχομένων είναι:

$$A \cap B \cap C = \{(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\} \implies P(A \cap B \cap C) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

Για να είναι τα ενδεχόμενα A, B, C από κοινού ανεξάρτητα, θα έπρεπε να ισχύει:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

Όμως,

$$P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{4}$$

Άρα τα ενδεχόμενα A, B και C δεν είναι από κοινού ανεξάρτητα.

Άσκηση 5

Σε ένα εργαστήριο υπάρχουν δύο όμοια στην όψη νομίσματα:

- Το νόμισμα N_1 είναι δίκαιο, δηλαδή φέρνει κεφαλή με πιθανότητα $p_1 = 0{,}5$.
- Το νόμισμα N_2 είναι πειραγμένο και φέρνει κεφαλή με πιθανότητα $p_2 = 0{,}8$.

Επιλέγουμε στην τύχη ένα από τα δύο νομίσματα (με πιθανότητα $1/2$) και το ρίχνουμε επανειλημμένα. Έστω K_i το ενδεχόμενο η i-οστή ρίψη να φέρει κεφαλή.

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(K_1)$ και την πιθανότητα $P(K_1 \cap K_2)$.

β) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα K_1 και K_2 είναι ανεξάρτητα. Είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητα αν γνωρίζουμε ποιο νόμισμα επιλέχθηκε;

γ) Υποθέστε ότι πραγματοποιούνται n ρίψεις με το επιλεγμένο νόμισμα και όλες καταλήγουν σε κεφαλή ($K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_n$). Να υπολογίσετε την πιθανότητα να έχουμε επιλέξει το νόμισμα N_2 συναρτήσει του n. Τι συμβαίνει με την πιθανότητα αυτή καθώς το $n \to \infty$;

Λύση

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα επιλογής νομίσματος:

- N_1: Επιλέγεται το νόμισμα N_1, με $P(N_1) = 0{,}5$.
- N_2: Επιλέγεται το νόμισμα N_2, με $P(N_2) = 0{,}5$.

Τα N_1 και N_2 αποτελούν διαμέριση του δειγματικού χώρου.

α) Σύμφωνα με το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας, η πιθανότητα εμφάνισης κεφαλής στην 1η ρίψη είναι:

$$P(K_1) = P(K_1 \mid N_1)P(N_1) + P(K_1 \mid N_2)P(N_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}25 + 0{,}40 = 0{,}65$$

Για το ενδεχόμενο να εμφανιστεί κεφαλή και στις δύο πρώτες ρίψεις ($K_1 \cap K_2$), αν γνωρίζουμε ποιο νόμισμα χρησιμοποιείται, οι ρίψεις είναι ανεξάρτητες:

$$P(K_1 \cap K_2 \mid N_1) = P(K_1 \mid N_1) \cdot P(K_2 \mid N_1) = (0{,}5)^2 = 0{,}25$$

$$P(K_1 \cap K_2 \mid N_2) = P(K_1 \mid N_2) \cdot P(K_2 \mid N_2) = (0{,}8)^2 = 0{,}64$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:

$$\begin{aligned} P(K_1 \cap K_2) &= P(K_1 \cap K_2 \mid N_1)P(N_1) + P(K_1 \cap K_2 \mid N_2)P(N_2) \\ &= 0{,}25 \cdot 0{,}5 + 0{,}64 \cdot 0{,}5 = 0{,}125 + 0{,}320 = 0{,}445 \end{aligned}$$

β) Λόγω συμμετρίας ισχύει $P(K_2) = P(K_1) = 0{,}65$. Το γινόμενο των πιθανοτήτων είναι:

$$P(K_1) \cdot P(K_2) = 0{,}65 \cdot 0{,}65 = 0{,}4225$$

Επειδή $P(K_1 \cap K_2) = 0{,}445 \neq 0{,}4225 = P(K_1)P(K_2)$, τα ενδεχόμενα K_1 και K_2 δεν είναι ανεξάρτητα.

Αντίθετα, δεδομένου του νομίσματος που επιλέχθηκε:

$$P(K_1 \cap K_2 \mid N_1) = 0{,}25 = P(K_1 \mid N_1) \cdot P(K_2 \mid N_1)$$

$$P(K_1 \cap K_2 \mid N_2) = 0{,}64 = P(K_1 \mid N_2) \cdot P(K_2 \mid N_2)$$

Συνεπώς, τα ενδεχόμενα K_1 και K_2 είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητα δεδομένου του επιλεγμένου νομίσματος.

γ) Έστω $H_n = K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_n$ το ενδεχόμενο να εμφανιστεί κεφαλή και στις n ρίψεις. Δεδομένου του νομίσματος, οι n ρίψεις είναι ανεξάρτητες, επομένως:

$$P(H_n \mid N_1) = (p_1)^n = (0{,}5)^n \quad \text{και} \quad P(H_n \mid N_2) = (p_2)^n = (0{,}8)^n$$

Σύμφωνα με τον Κανόνα του Bayes:

$$P(N_2 \mid H_n) = \frac{P(H_n \mid N_2)P(N_2)}{P(H_n \mid N_1)P(N_1) + P(H_n \mid N_2)P(N_2)}$$

$$= \frac{(0{,}8)^n \cdot 0{,}5}{(0{,}5)^n \cdot 0{,}5 + (0{,}8)^n \cdot 0{,}5} = \frac{(0{,}8)^n}{(0{,}5)^n + (0{,}8)^n}$$

$$= \frac{1}{1 + \left(\frac{0{,}5}{0{,}8}\right)^n} = \frac{1}{1 + \left(\frac{5}{8}\right)^n}$$

Καθώς το $n \to \infty$, επειδή $\frac{5}{8} < 1$, έχουμε $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^n = 0$. Συνεπώς:

$$\lim_{n\to\infty} P(N_2 \mid H_n) = \frac{1}{1+0} = 1$$

Δηλαδή, καθώς ο αριθμός των συνεχόμενων κεφαλών αυξάνεται, γίνεται σχεδόν βέβαιο ότι χρησιμοποιούμε το πειραγμένο νόμισμα N_2.

Άσκηση 6

Δύο παίκτες, ο A και ο B, ρίχνουν εναλλάξ ένα δίκαιο 6-εδρο ζάρι, ξεκινώντας ο παίκτης A. Νικητής αναδεικνύεται ο πρώτος που θα φέρει αποτέλεσμα 5 ή 6.

α) Ποια είναι η πιθανότητα να νικήσει ο παίκτης A στην πρώτη του ρίψη;

β) Ποια είναι η πιθανότητα το παιχνίδι να διαρκέσει το πολύ 4 ρίψεις συνολικά;

γ) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας, να υπολογίσετε την πιθανότητα να κερδίσει τελικά το παιχνίδι ο παίκτης A.

δ) Δεδομένου ότι ο παίκτης A δεν κέρδισε στην πρώτη του ρίψη, ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα να κερδίσει τελικά το παιχνίδι;

Λύση

Σε κάθε ανεξάρτητη ρίψη του ζαριού:

- Η πιθανότητα επιτυχίας (εμφάνιση 5 ή 6) είναι $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
- Η πιθανότητα αποτυχίας (εμφάνιση $\{1, 2, 3, 4\}$) είναι $q = 1 - p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

α) Ο παίκτης A νικάει στην πρώτη του ρίψη αν φέρει άμεσα 5 ή 6. Συνεπώς:

$$P(\text{Ο } A \text{ νικάει στην 1η ρίψη}) = p = \frac{1}{3}$$

β) Έστω T ο συνολικός αριθμός ρίψεων μέχρι τη λήξη του παιχνιδιού. Το παιχνίδι διαρκεί περισσότερες από 4 ρίψεις αν και μόνο αν και οι 4 πρώτες ρίψεις είναι αποτυχημένες. Επειδή οι ρίψεις είναι ανεξάρτητες:

$$P(T > 4) = q^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

Επομένως, η πιθανότητα το παιχνίδι να διαρκέσει το πολύ 4 ρίψεις είναι:

$$P(T \leq 4) = 1 - P(T > 4) = 1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81} \approx 0{,}8025$$

γ) Έστω W_A το ενδεχόμενο να κερδίσει τελικά το παιχνίδι ο παίκτης A, και $w = P(W_A)$. Εξετάζουμε τα αποτελέσματα του πρώτου γύρου (1η ρίψη από τον A, 2η ρίψη από τον B):

- Ο A πετυχαίνει στην 1η ρίψη με πιθανότητα $p = \frac{1}{3}$. Τότε ο A κερδίζει άμεσα, άρα $P(W_A \mid \text{επιτυχία } A) = 1$.
- Ο A αποτυγχάνει και ο B πετυχαίνει στη 2η ρίψη με πιθανότητα $q \cdot p = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$. Τότε κερδίζει ο B, άρα $P(W_A \mid \text{αποτυχία } A \text{ και επιτυχία } B) = 0$.
- Και οι δύο αποτυγχάνουν με πιθανότητα $q^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$. Σε αυτή την περίπτωση, το παιχνίδι επιστρέφει στην αρχική κατάσταση (είναι ξανά η σειρά του A), οπότε η δεσμευμένη πιθανότητα νίκης του A είναι και πάλι w.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:

$$w = p \cdot 1 + (q \cdot p) \cdot 0 + q^2 \cdot w = \frac{1}{3} + \frac{4}{9}w$$

Λύνοντας ως προς w:

$$w - \frac{4}{9}w = \frac{1}{3} \iff \frac{5}{9}w = \frac{1}{3} \iff w = \frac{1/3}{5/9} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Συνεπώς, η πιθανότητα να κερδίσει τελικά ο παίκτης A είναι $\frac{3}{5}$.

δ) Έστω F_1 το ενδεχόμενο ο παίκτης A να αποτύχει στην 1η ρίψη, με $P(F_1) = q = \frac{2}{3}$. Δεδομένου ότι ο A απέτυχε, είναι η σειρά του B να ρίξει:

- Με πιθανότητα $p = \frac{1}{3}$ ο B πετυχαίνει και ο A χάνει (πιθανότητα νίκης 0).
- Με πιθανότητα $q = \frac{2}{3}$ ο B αποτυγχάνει και το παιχνίδι επιστρέφει στον A με πιθανότητα νίκης $w = \frac{3}{5}$.

Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:

$$P(W_A \mid F_1) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot w = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$