ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2026-2027

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1

Σε έναν πληθυσμό καταγράφουμε το φύλο των παιδιών για οικογένειες με 3 παιδιά. Ορίζουμε με A να είναι ένα παιδί αγόρι και με K να είναι ένα παιδί κορίτσι. Η σειρά καταγραφής είναι η σειρά ηλικίας.

α) Προσδιορίστε τον δειγματικό χώρο.

β) Εκφράστε τα εξής σύνολα:

1. $X =$ Η οικογένεια έχει τουλάχιστον δύο αγόρια.
2. $Y =$ Το πρώτο παιδί της οικογένειας είναι αγόρι.
3. $Z =$ Όλα τα παιδιά της οικογένειας έχουν το ίδιο φύλο.

Λύση

α) Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από όλες τις πιθανές τριάδες παιδιών. Κάθε παιδί μπορεί να είναι είτε αγόρι (A) είτε κορίτσι (K). Άρα, για κάθε θέση στην τριάδα, έχουμε 2 δυνατές επιλογές:

1. Πρώτο παιδί: A ή K
2. Δεύτερο παιδί: A ή K
3. Τρίτο παιδί: A ή K

Αφού έχουμε 2 επιλογές για το πρώτο παιδί, 2 για το δεύτερο και 2 για το τρίτο, ο συνολικός αριθμός των δυνατών τριάδων είναι 2^3, δηλαδή 8 στοιχεία:

$$\Omega = \{AAA,\ AAK,\ AKA,\ AKK,\ KAA,\ KAK,\ KKA,\ KKK\}.$$

β) Σύνολο $X =$ Η οικογένεια έχει τουλάχιστον δύο αγόρια.

Για να βρούμε το σύνολο X, πρέπει να εντοπίσουμε όλες τις τριάδες στον δειγματικό χώρο που έχουν τουλάχιστον δύο αγόρια, δηλαδή δύο ή τρία αγόρια.

$$X = \{AAA,\ AAK,\ AKA,\ KAA\}.$$

Σύνολο $Y =$ Το πρώτο παιδί της οικογένειας είναι αγόρι.

Για να βρούμε το σύνολο Y, πρέπει να εντοπίσουμε όλες τις τριάδες στον δειγματικό χώρο όπου το πρώτο παιδί είναι αγόρι (A).

$$Y = \{AAA,\ AAK,\ AKA,\ AKK\}.$$

Σύνολο $Z =$ Όλα τα παιδιά της οικογένειας έχουν το ίδιο φύλο.

Για να βρούμε το σύνολο Z, πρέπει να εντοπίσουμε όλες τις τριάδες στον δειγματικό χώρο όπου και τα τρία παιδιά είναι όλα αγόρια είτε όλα κορίτσια.

$$Z = \{AAA,\ KKK\}.$$

Άσκηση 2

Ρίχνουμε ζεύγος τίμιων ζαριών.

α) Ποια τα στοιχεία του ενδεχομένου «τα δύο αποτελέσματα έχουν άθροισμα 4»·

β) Ποια η πιθανότητα του ενδεχομένου αυτού·

γ) Ποια η πιθανότητα το άθροισμα των ενδείξεων να διαιρείται με το 3·

Λύση

α) Αν ονομάσουμε A το ενδεχόμενο «τα δύο αποτελέσματα έχουν άθροισμα 4» τότε έχουμε:

$$A = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}.$$

β) Η πιθανότητα του A θα είναι:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

γ) Ονομάζουμε B το ενδεχόμενο «το άθροισμα των ενδείξεων να διαιρείται με το 3».
Τα πιθανά αθροίσματα των ενδείξεων των δύο ζαριών είναι $2, 3, \ldots, 12$. Από αυτά τα μόνα που διαιρούνται με το 3 είναι τα $3, 6, 9, 12$.
Επομένως αρκεί να βρούμε τις περιπτώσεις που το άθροισμα των δύο ενδείξεων ισούται με $3, 6, 9$ ή 12. Αυτές είναι:

$$(1,2),(2,1),(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3),(3,6),(6,3),(4,5),(5,4),(6,6).$$

Άρα:

$$B = \{(1,2),(2,1),(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3),(3,6),(6,3),(4,5),(5,4),(6,6)\}.$$

Οπότε

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

Άσκηση 3

Σε μια τάξη με 400 φοιτητές διδάσκονται ως μαθήματα επιλογής η Φυσική και η Χημεία. Κάθε φοιτητής είναι υποχρεωμένος να παρακολουθεί τουλάχιστον ένα εκ των δύο μαθημάτων. Από το παραπάνω σύνολο φοιτητών οι 340 παρακολουθούν τη Φυσική, ενώ οι 240 τη Χημεία. Επιλέγουμε τυχαία ένα φοιτητή. Έστω A το ενδεχόμενο να παρακολουθεί τη Φυσική, και G το ενδεχόμενο να παρακολουθεί τη Χημεία.

α) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και G είναι ασυμβίβαστα.

β) Να αποδείξετε ότι

$$P(G - A) \leq \frac{3}{5}.$$

γ) Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να παρακολουθεί μόνο το μάθημα της Φυσικής.

δ) Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να παρακολουθεί μόνο ένα εκ των δύο μαθημάτων.

Λύση

α) Εξετάζουμε τα ενδεχόμενα A και G. Αθροίζοντας τους φοιτητές που παρακολουθούν τα μαθήματα της Φυσικής και της Χημείας έχουμε:

$$340 + 240 = 580 > 400.$$

Άρα,

$$A \cap G \neq \emptyset.$$

Επομένως υπάρχουν φοιτητές που παρακολουθούν και τα δύο μαθήματα. Οπότε τα ενδεχόμενα A και G δεν είναι ασυμβίβαστα.

β) Ισχύει ότι $G - A \subseteq G$, οπότε:

$$P(G - A) \leq P(G).$$

Επειδή:

$$P(G) = \frac{240}{400} = \frac{3}{5},$$

έχουμε:

$$P(G - A) \leq \frac{3}{5}.$$

γ) Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A - G$.
Γνωρίζουμε ότι:

$$P(A \cup G) = 1.$$

Από τον τύπο:

$$P(A \cup G) = P(A) + P(G) - P(A \cap G),$$

έχουμε:

$$\begin{aligned} P(A) + P(G) - P(A \cap G) &= 1, \\ P(A \cap G) &= P(A) + P(G) - 1 \\ &= \frac{340}{400} + \frac{240}{400} - 1 \\ &= \frac{17}{20} + \frac{12}{20} - \frac{20}{20} \\ &= \frac{9}{20}. \end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} P(A - G) &= P(A) - P(A \cap G) \\ &= \frac{340}{400} - \frac{9}{20} \\ &= \frac{17}{20} - \frac{9}{20} \\ &= \frac{8}{20} \\ &= \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

δ) Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου

$$(A - G) \cup (G - A).$$

Τα ενδεχόμενα $A - G$ και $G - A$ είναι ασυμβίβαστα, επομένως:

$$\begin{aligned} P\big[(A-G)\cup(G-A)\big] &= P(A-G)+P(G-A) \\ &= P(A)-P(A\cap G)+P(G)-P(A\cap G) \\ &= P(A)+P(G)-2P(A\cap G) \\ &= \frac{340}{400}+\frac{240}{400}-2\cdot\frac{9}{20} \\ &= \frac{17}{20}+\frac{12}{20}-\frac{18}{20} \\ &= \frac{11}{20}. \end{aligned}$$

Άσκηση 4

Τα ακόλουθα δεδομένα δόθηκαν σε μια έρευνα ενός συνόλου 1000 εγγεγραμμένων σε ένα περιοδικό:
Αναφορικά με εργασία, οικογενειακή κατάσταση και μόρφωση, υπήρχαν 312 επαγγελματίες, 470 παντρεμένοι, 525 απόφοιτοι κολεγίου, 42 επαγγελματίες απόφοιτοι κολεγίου, 147 παντρεμένοι απόφοιτοι κολεγίου, 86 παντρεμένοι επαγγελματίες και 25 παντρεμένοι επαγγελματίες απόφοιτοι κολεγίου.
Αποδείξτε ότι τα νούμερα που αναφέρθηκαν στη μελέτη πρέπει να είναι ανακριβή.

Λύση

Έστω M το σύνολο των επαγγελματιών, W το σύνολο των παντρεμένων και G το σύνολο των αποφοίτων κολεγίου. Για να δείξουμε ότι τα νούμερα που μας παρουσιάζουν δεν είναι ακριβή, αρκεί να δείξουμε ότι

$$P(M\cup W\cup G) > 1.$$

Έχουμε ότι

$$P(M)=\frac{312}{1000},\qquad P(W)=\frac{470}{1000},\qquad P(G)=\frac{525}{1000},$$

$$P(M\cap G)=\frac{42}{1000},\qquad P(W\cap G)=\frac{147}{1000},\qquad P(W\cap M)=\frac{86}{1000},$$

$$P(M\cap W\cap G)=\frac{25}{1000}.$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$P(M\cup W\cup G) = P((M\cup W)\cup G)$$

$$= P(M\cup W)+P(G)-P((M\cup W)\cap G)$$

$$= P(M)+P(W)-P(M\cap W)+P(G)-P((M\cap G)\cup(W\cap G))$$

$$= P(M)+P(W)-P(M\cap W)+P(G)-P(M\cap G)-P(W\cap G)+P(M\cap W\cap G)$$

$$= \frac{312+470+525+25-(147+42+86)}{1000}$$

$$= \frac{1057}{1000} > 1.$$

Επομένως, τα νούμερα είναι αναληθή.

Άσκηση 5

Ρίχνουμε 2 ζάρια. Έστω A το γεγονός ότι το άθροισμα των ζαριών είναι άρτιο, B το γεγονός ότι σε μια ρίψη έχουμε φέρει τουλάχιστον έναν άσσο, και C το γεγονός ότι το άθροισμα των ζαριών είναι 4.
Να υπολογισθούν τα ενδεχόμενα:

(α) AB

(β) $A \cup B$

(γ) AB^c

(δ) ABC

Λύση

Ισχύουν τα παρακάτω:

A: Το άθροισμα των ζαριών είναι άρτιο.

B: Σε μια ρίψη έχουμε φέρει τουλάχιστον έναν άσσο.

C: Το άθροισμα των ζαριών είναι 4.

$$A = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),(4,4),(4,6),(5,1),(5,3),(5,5),(6,2),(6,4),(6,6)\}$$

$$B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)\}$$

$$C = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$$

(α) AB

Το ενδεχόμενο AB συμβαίνει όταν το άθροισμα των ζαριών είναι άρτιο και ταυτόχρονα έχουμε φέρει τουλάχιστον έναν άσσο.

$$AB = \{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(5,1)\}$$

(β) $A \cup B$

Το ενδεχόμενο $A \cup B$ συμβαίνει όταν το άθροισμα των ζαριών είναι άρτιο ή όταν τουλάχιστον ένα από τα δύο ζάρια είναι άσσος.

$$A \cup B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5),(4,1),(4,2),(4,4),(4,6),(5,1),(5,3)$$

(γ) AB^c

Το ενδεχόμενο AB^c συμβαίνει όταν το άθροισμα των ζαριών είναι άρτιο και κανένα από τα δύο ζάρια δεν είναι άσσος.

$$AB^c = \{(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,5),(4,2),(4,4),(4,6),(5,3),(5,5),(6,2),(6,4),(6,6)\}$$

(δ) ABC

Το ενδεχόμενο ABC συμβαίνει όταν το άθροισμα των ζαριών είναι άρτιο, έχουμε φέρει τουλάχιστον έναν άσσο και το άθροισμα των δύο ζαριών είναι 4.

$$ABC = \{(1,3),(3,1)\}$$

Άσκηση 6

Έστω τα ενδεχόμενα A και B με

$$P(A) = x, \qquad P(B) = y$$

και

$$P(A \cup B) = z.$$

Υπολογίστε τις ακόλουθες πιθανότητες:

(α) $P(A \cap B)$

(β) $P(A^c \cap B^c)$

(γ) $P(A^c \cup B^c)$

(δ) $P(A \cap B^c)$

(ε) $P(A^c \cup B)$

Λύση

(α) Γνωρίζουμε ότι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Άρα,

$$z = x + y - P(A \cap B),$$

οπότε

$$P(A \cap B) = x + y - z.$$

(β)

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P\big((A^c \cap B^c)^c\big)$$

$$= 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - z.$$

(γ)

$$P(A^c \cup B^c) = 1 - P\big((A^c \cup B^c)^c\big)$$

$$= 1 - P(A \cap B)$$

$$= 1 - x - y + z.$$

(δ)

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$= x - (x + y - z)$$

$$= z - y.$$

(ε)

$$P(A^c \cup B) = 1 - P(A \cap B^c)$$

$$= 1 - (z - y)$$

$$= 1 - z + y.$$