ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΨ-317: Εφαρμοσμένες Στοχαστικές Διαδικασίες - Εαρινό Εξάμηνο 2026
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 17/03/2026 Ημερομηνία Παράδοσης: 26/03/2026

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, **εδώ**. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων. Μπορείτε, αν προτιμάτε, να χρησιμοποιήσετε προγράμματα τύπου Latex ή Word. Για τις προγραμματιστικές ασκήσεις θα πρέπει να παραδώσετε ό,τι ζητείται στην άσκηση.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1

Σε έναν δρομολογητή φθάνουν δύο ειδών πακέτα, A και B. Τα πακέτα A φθάνουν σύμφωνα με διαδικασία Ποισσον με ρυθμό $\lambda_A = 1$ πακέτο ανά δευτερόλεπτο, ενώ τα πακέτα B φθάνουν σύμφωνα με διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda_B = 2$ πακέτα ανά δευτερόλεπτο. Οι δύο διαδικασίες αφίξεων είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

(α') Υπολογίστε την πιθανότητα να φθάσουν στο δρομολογητή 100 πακέτα τύπου A μέσα σε ένα λεπτό.

(β') Έστω ότι στο πρώτο λεπτό φθάνουν στο δρομολογητή 80 πακέτα τύπου A. Υπολογίστε την πιθανότητα στο δεύτερο λεπτό να φθάσουν 100 πακέτα τύπου A.

(γ') Υπολογίστε την πιθανότητα να φθάσουν στο δρομολογητή 100 πακέτα συνολικά μέσα σε ένα λεπτό.

(δ') Υπολογίστε τη μέση τιμή του χρόνου μεταξύ της άφιξης του τρίτου και του τέταρτου πακέτου.

(ε') Δεδομένου ότι σε ένα λεπτό έχουν φθάσει 100 πακέτα, υπολογίστε την πιθανότητα να είναι όλα τύπου A.

(ς') Δεδομένου ότι σε ένα λεπτό έχουν φθάσει 100 πακέτα, υπολογίστε την πιθανότητα 40 από τα 100 να είναι τύπου A.

Άσκηση 2

Οι μεταφορικές εταιρίες S και T στέλνουν φορτία από την Αθήνα στο Ηράκλειο σύμφωνα με δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους στοχαστικές διαδικασίες Poisson με ρυθμούς λ_S και λ_T (φορτία ανά ημέρα), αντίστοιχα.
Το βάρος κάθε φορτίου σε τόνους, ανεξάρτητα από ποια μεταφορική προέρχεται, είναι τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πιθανότητας:

$$p_X(x) = \begin{cases} 0.5, & x = 600 \\ 0.3, & x = 1000 \\ 0.2, & x = 2000 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

1) Ποια είναι η πιθανότητα του γεγονότος: 5 φορτία φτάνουν στο Ηράκλειο μεταξύ 09:00–15:00 μέσω της μεταφορικής S ΚΑΙ 7 φορτία φτάνουν στο Ηράκλειο μεταξύ 16:00–24:00 μέσω της μεταφορικής T·

2) Υπολογίστε το μέσο βάρος του συνολικού φορτίου που φτάνει στο Ηράκλειο στη διάρκεια 6 ωρών.

Άσκηση 3

Το αδερφάκι σας παίζει το ίδιο βιντεοπαιχνίδι συνεχώς. Υποθέστε ότι κερδίζει κάθε παιχνίδι με πιθανότητα p, ανεξάρτητα από τα αποτελέσματα άλλων παιχνιδιών. Τα μεσάνυχτα μπαίνετε στο δωμάτιό του και διαπιστώνετε ότι χάνει το παρόν παιχνίδι. Ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού των χαμένων παιχνιδιών μεταξύ της πιο πρόσφατης νίκης και της πρώτης μελλοντικής νίκης·

Άσκηση 4

Μία πιτσαρία σερβίρει n διαφορετικά είδη πίτσας και την επισκέπτεται αριθμός Κ πελατών σε μία περίοδο χρόνου, όπου το Κ είναι μία τυχαία μεταβλητή Poisson με μέση τιμή λ. Κάθε πελάτης παραγγέλνει μία πίτσα και όλα τα είδη πίτσας έχουν την ίδια πιθανότητα, ανεξάρτητα από τον αριθμό των πελατών και των ειδών πίτσας που αυτοί παραγγέλνουν. Να βρείτε τον αριθμό των διαφορετικών ειδών πίτσας που σερβίρονται.

Άσκηση 5

Κάθε δευτερόλεπτο ένα σήμα λαμβάνεται με πιθανότητα p, ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα δευτερόλεπτα. Έστω T ο χρόνος (σε δευτερόλεπτα) μέχρι να εμφανιστεί το πρώτο σήμα.

(α΄) Ποια κατανομή ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή T· Γράψτε τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας (ΣΜΠ) της.

(β΄) Υπολογίστε τη μέση τιμή $E[T]$ και τη διασπορά $var(T)$ της T.

(γ΄) Υπολογίστε την πιθανότητα το πρώτο σήμα να εμφανιστεί μετά από τουλάχιστον n δευτερόλεπτα, δηλαδή

$$P(T \geq n).$$

(δ΄) Δεδομένου ότι δεν εμφανίστηκε σήμα για τα πρώτα m δευτερόλεπτα, υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα

$$P(T > m + n \mid T > m).$$

Άσκηση 6

Σε μία γραμμή παραγωγής κάθε προϊόν είναι ελαττωματικό με πιθανότητα p, ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα. Έστω N ο αριθμός προϊόντων που πρέπει να παραχθούν μέχρι να εμφανιστεί το τρίτο ελαττωματικό προϊόν.

(α΄) Ποια κατανομή ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή N· Γράψτε τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας (ΣΜΠ) της.

(β΄) Υπολογίστε την πιθανότητα το τρίτο ελαττωματικό προϊόν να εμφανιστεί στο n-οστό προϊόν.

(γ΄) Υπολογίστε τη μέση τιμή $E[N]$ και τη διασπορά $var(N)$ της N.

(δ΄) Έστω F ο αριθμός μη ελαττωματικών προϊόντων πριν εμφανιστεί το τρίτο ελαττωματικό. Βρείτε τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας (ΣΜΠ) της F.