ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2026-2027

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 2

Άσκηση 1

Η Μαρία θέλει να φάει ένα μπισκότο αλλά κάνει δίαιτα. Αποφασίζει να ρίξει ένα δίκαιο κέρμα για να αποφασίσει. Θα φάει το μπισκότο, αν η ρίψη του κέρματος φέρει κεφαλή. Αν έρθουν γράμματα δεν αφήνει το μπισκότο αμέσως, αλλά ρίχνει το κέρμα άλλες δύο φορές για να αποφασίσει. Αν και οι δύο επόμενες ρίψεις φέρουν κεφαλή, τότε τρώει το μπισκότο. Διαφορετικά το φυλάει για την επόμενη φορά που θα το πεθυμήσει...

α) Υπολογίστε την πιθανότητα με την οποία η Μαρία τρώει το μπισκότο.

β) Δεδομένου ότι η Μαρία έφαγε το μπισκότο, ποια η πιθανότητα ότι η πρώτη ρίψη του κέρματος έφερε κεφαλή;

Λύση

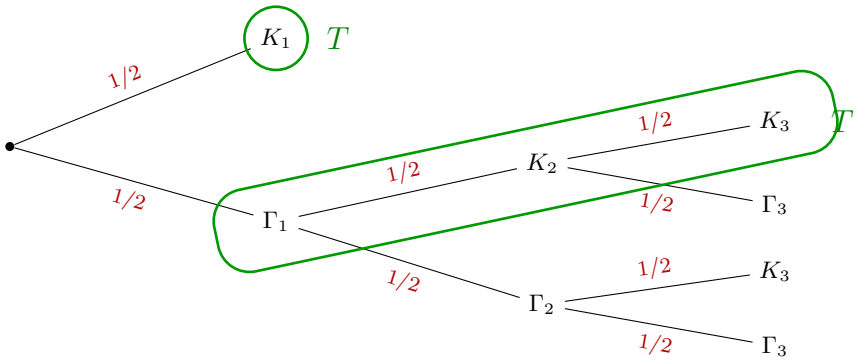
α) Ορίζουμε τα γεγονότα:

$K_i = \{\text{Η } i\text{-οστή ρίψη φέρνει κεφαλή}\}$

$\Gamma_i = \{\text{Η } i\text{-οστή ρίψη φέρνει γράμματα}\}$

$T = \{\text{Η Μαρία τρώει το μπισκότο}\}$

Το δενδρικό διάγραμμα του πειράματος:



Προφανώς, το ενδεχόμενο να φάει η Μαρία το μπισκότο είναι:

$$T = K_1 \cup (\Gamma_1 \cap K_2 \cap K_3)$$

Τα ενδεχόμενα K_1 και $(\Gamma_1 \cap K_2 \cap K_3)$ είναι ξένα (ασυμβίβαστα) μεταξύ τους, όπως φαίνεται και από το

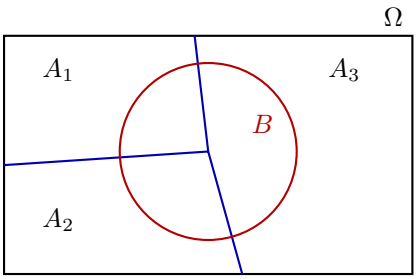
δενδροδιάγραμμα. Επομένως:

$$\begin{aligned} P(T) &= P(K_1) + P(\Gamma_1 \cap K_2 \cap K_3) \\ &= P(K_1) + P(\Gamma_1) \cdot P(K_2) \cdot P(K_3) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

β) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η δεσμευμένη πιθανότητα η πρώτη ρίψη να έφερε κεφαλή, δεδομένου ότι η Μαρία έφαγε το μπισκότο:

$$\begin{aligned} P(K_1 \mid T) &= \frac{P(K_1 \cap T)}{P(T)} \\ &= \frac{P(K_1)}{P(T)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Θεωρία: Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας



Έστω $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ μία διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω σε ξένα ανά δύο γεγονότα. Τότε για οποιοδήποτε γεγονός $B \subseteq \Omega$ ισχύει:

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$$

(Αυτά είναι ξένα μεταξύ τους γεγονότα, γιατί ο Ω έχει διαμεριστεί κατάλληλα).

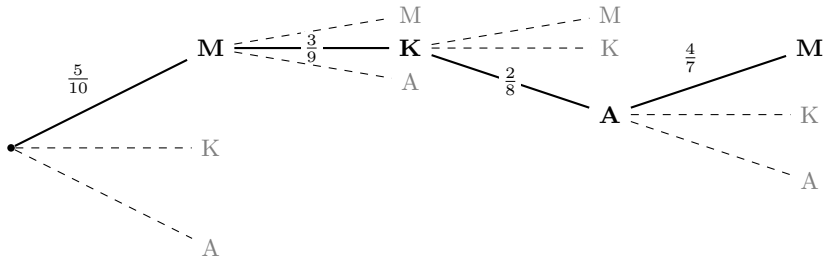
Επομένως:

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i) \end{aligned}$$

Άσκηση 2

Ένα δοχείο περιέχει 10 πανομοιότυπα σφαιρίδια, από τα οποία τα 5 είναι μαύρα, τα 3 είναι κόκκινα και τα 2 είναι άσπρα. Βγάζουμε τέσσερα σφαιρίδια (ένα κάθε φορά) χωρίς να τα επανατοποθετούμε στο δοχείο. Να βρεθεί η πιθανότητα το πρώτο σφαιρίδιο να είναι μαύρο, το δεύτερο κόκκινο, το τρίτο άσπρο και το τέταρτο μαύρο.

Λύση Το πείραμα αποτελείται από τέσσερα στάδια. Μπορούμε να κάνουμε χρήση του ακόλουθου δενδροδιαγράμματος:



Στο δενδροδιάγραμμα φαίνεται μόνο η διαδρομή που μας ενδιαφέρει: M → K → A → M, καθώς επίσης και η εκάστοτε πιθανότητα για τη μετάβαση σε κάθε στάδιο. Έτσι θα έχουμε:

$$P(M) = \frac{5}{10}, \qquad P(K \mid M) = \frac{3}{9}, \qquad P(A \mid M \cap K) = \frac{2}{8}, \qquad P(M \mid M \cap K \cap A) = \frac{4}{7}$$

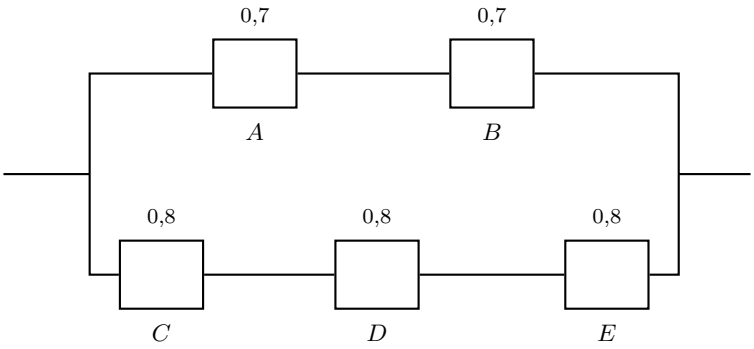
Εμείς αναζητούμε την πιθανότητα $P(M \cap K \cap A \cap M)$. Σύμφωνα, λοιπόν, με το πολλαπλασιαστικό θεώρημα θα έχουμε:

$$P(M \cap K \cap A \cap M) = P(M) \cdot P(K \mid M) \cdot P(A \mid M \cap K) \cdot P(M \mid M \cap K \cap A)$$

$$= \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{1}{42} \approx 0{,}024$$

Άσκηση 3

Θεωρούμε το ηλεκτρικό σύστημα που φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα. Τα εξαρτήματα A, B, C, D και E λειτουργούν ανεξάρτητα μεταξύ τους, με τις αντίστοιχες πιθανότητες λειτουργίας που αναγράφονται επάνω σε κάθε εξάρτημα.



α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα το σύστημα να λειτουργεί.

β) Αν γνωρίζετε ότι το σύστημα λειτουργεί, ποια είναι η πιθανότητα το εξάρτημα A να μη λειτουργεί·

γ) Αν γνωρίζετε ότι το σύστημα δεν λειτουργεί, ποια είναι η πιθανότητα να μη λειτουργεί το εξάρτημα A·

Λύση

α) Η πιθανότητα λειτουργίας του συστήματος είναι ίση με:

$$\begin{aligned}
P((A\cap B)\cup(C\cap D\cap E)) &= 1-P(((A\cap B)\cup(C\cap D\cap E))^c)\\
&= 1-P((A\cap B)^c\cap(C\cap D\cap E)^c)\\
&= 1-P((A\cap B)^c)\cdot P((C\cap D\cap E)^c)\\
&= 1-[1-P(A\cap B)]\cdot[1-P(C\cap D\cap E)]\\
&= 1-[1-P(A)\cdot P(B)]\cdot[1-P(C)\cdot P(D)\cdot P(E)]\\
&= 1-[1-(0{,}7)(0{,}7)]\cdot[1-(0{,}8)(0{,}8)(0{,}8)]\\
&= 1-(1-0{,}49)(1-0{,}512)\\
&= 1-(0{,}51)(0{,}488) = 1-0{,}24888 = 0{,}75112
\end{aligned}$$

Η παραπάνω ισότητα ισχύει, επειδή τα πέντε εξαρτήματα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

β) Η δεσμευμένη πιθανότητα υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{P[\text{το σύστημα λειτουργεί, αλλά το εξάρτημα } A \text{ δε λειτουργεί}]}{P[\text{το σύστημα λειτουργεί}]}\\
&= \frac{P(A^c\cap C\cap D\cap E)}{P[\text{το σύστημα λειτουργεί}]}\\
&= \frac{P(A^c)\cdot P(C)\cdot P(D)\cdot P(E)}{0{,}75112}\\
&= \frac{(1-0{,}7)(0{,}8)(0{,}8)(0{,}8)}{0{,}75112}\\
&= \frac{(0{,}3)(0{,}512)}{0{,}75112} = \frac{0{,}1536}{0{,}75112} \approx 0{,}2045
\end{aligned}$$

γ) Ζητείται η πιθανότητα να μη λειτουργεί το εξάρτημα A, δεδομένου ότι το σύστημα δε λειτουργεί:

$$P(A^c \mid \text{το σύστημα δε λειτουργεί}) = \frac{P[\text{το σύστημα δε λειτουργεί και το εξάρτημα } A \text{ δε λειτουργεί}]}{P[\text{το σύστημα δε λειτουργεί}]}$$

$$= \frac{P(A^c \cap \text{το σύστημα δε λειτουργεί})}{1 - P[\text{το σύστημα λειτουργεί}]}$$

Όταν το εξάρτημα A δε λειτουργεί (A^c), ο πάνω κλάδος έχει ήδη τεθεί εκτός λειτουργίας. Συνεπώς, για να μη λειτουργεί συνολικά το σύστημα, αρκεί να μη λειτουργεί ούτε ο κάτω κλάδος, δηλαδή να μη λειτουργεί τουλάχιστον ένα από τα C, D, E (γεγονός $C^c \cup D^c \cup E^c$).

Από τους νόμους De Morgan:

$$C^c \cup D^c \cup E^c = (C \cap D \cap E)^c$$

με πιθανότητα:

$$P(C^c \cup D^c \cup E^c) = 1 - P(C \cap D \cap E) = 1 - (0{,}8)(0{,}8)(0{,}8) = 1 - 0{,}512 = 0{,}488$$

Λόγω ανεξαρτησίας του A από τα στοιχεία του κάτω κλάδου:

$$P(A^c \mid \text{το σύστημα δε λειτουργεί}) = \frac{P(A^c \cap (C^c \cup D^c \cup E^c))}{1 - P[\text{το σύστημα λειτουργεί}]}$$

$$= \frac{P(A^c) \cdot P(C^c \cup D^c \cup E^c)}{0{,}24888}$$

$$= \frac{(1 - 0{,}7) \cdot 0{,}488}{0{,}24888}$$

$$= \frac{0{,}3 \cdot 0{,}488}{0{,}24888} = \frac{0{,}1464}{0{,}24888} = \frac{10}{17} \approx 0{,}5882$$

Άσκηση 4

Υπάρχουν 2 δρόμοι για να πάει κανείς από το σημείο A στο σημείο B, και 2 δρόμοι για να πάει από το σημείο B στο σημείο Γ. Κάθε ένας από τους 4 δρόμους έχει πιθανότητα p να είναι κλειστός, ανεξάρτητα από τους άλλους.

α) Βρείτε την πιθανότητα να υπάρχει ανοιχτή διαδρομή από το σημείο A στο σημείο B, δεδομένου ότι δεν υπάρχει ανοιχτή διαδρομή από το σημείο B στο σημείο Γ.

β) Βρείτε την πιθανότητα να υπάρχει ανοιχτή διαδρομή από το σημείο A στο σημείο B, δεδομένου ότι δεν υπάρχει ανοιχτή διαδρομή από το σημείο A στο σημείο Γ.

γ) Εστω ότι υπάρχει ένας δρόμος από το σημείο A κατευθείαν στο σημείο Γ. Υπολογίστε την πιθανότητα του ερωτήματος (β). Συγκρίνετε τα δύο αποτελέσματα και δώστε μια εξήγηση.

Λύση

Συμβολίζουμε με 0 και 1 τον κλειστό και ανοιχτό δρόμο, αντίστοιχα. Ο δειγματικός χώρος είναι το σύνολο,

$$\Omega = \{x_1x_2x_3x_4 : x_i \in \{0,1\}\}.$$

Έστω

$$A \leftrightarrow B = \{01ij : i,j \in \{0,1\}\} \cup \{10ij : i,j \in \{0,1\}\} \cup \{11ij : i,j \in \{0,1\}\},$$

το ενδεχόμενο να υπάρχει ανοιχτός δρόμος από το A στο B και $A \nleftrightarrow B$ η άρνηση του.

α)

$$P(A \leftrightarrow B \mid B \nleftrightarrow \Gamma) = P(A \leftrightarrow B) = 1 - P(A \nleftrightarrow B) = 1 - p^2$$

επειδή τα ενδεχόμενα $A \leftrightarrow B$ και $B \nleftrightarrow \Gamma$ είναι ανεξάρτητα.

β)

$$\begin{aligned} P(A \leftrightarrow B \mid A \nleftrightarrow \Gamma) &= \frac{P(A \leftrightarrow B \cap A \nleftrightarrow \Gamma)}{P(A \nleftrightarrow \Gamma)} \\ &= \frac{P(A \leftrightarrow B \cap B \nleftrightarrow \Gamma)}{1 - P(A \leftrightarrow \Gamma)} \\ &= \frac{P(A \leftrightarrow B)P(B \nleftrightarrow \Gamma)}{1 - P(A \leftrightarrow B)P(B \leftrightarrow \Gamma)} \\ &= \frac{(1-p^2)p^2}{1-(1-p^2)^2}. \end{aligned}$$

γ) Έστω E το ενδεχόμενο να είναι ανοιχτός ο δρόμος εξπρές από το A στο Γ. Τότε,

$$\begin{aligned} P(A \nleftrightarrow \Gamma) &= 1 - P(A \leftrightarrow \Gamma) \\ &= 1 - P(A \leftrightarrow \Gamma \mid E)P(E) - P(A \leftrightarrow \Gamma \mid E^c)P(E^c) \\ &= 1 - (1-p) - P(A \leftrightarrow B)P(B \leftrightarrow \Gamma)p \\ &= (1-p^2)^2 p - p \\ &= [1-(1-p^2)^2]p \end{aligned}$$

γ) Έστω E το ενδεχόμενο να είναι ανοιχτός ο δρόμος εξπρές από το A στο Γ (με $P(E) = 1-p$ και $P(E^c) = p$).

Ζητείται η δεσμευμένη πιθανότητα:

$$P(A \leftrightarrow B \mid A \nleftrightarrow \Gamma) = \frac{P((A \leftrightarrow B) \cap (A \nleftrightarrow \Gamma))}{P(A \nleftrightarrow \Gamma)}$$

Ανάλυση Αριθμητή: Για να συμβαίνει το ενδεχόμενο $(A \leftrightarrow B) \cap (A \nleftrightarrow \Gamma)$, απαιτείται:

- Να είναι ανοιχτό το τμήμα $A \to B$ (ενδεχόμενο $A \leftrightarrow B$).
- Να μην υπάρχει καμία ανοικτή διαδρομή προς το Γ ($A \nleftrightarrow \Gamma$). Αυτό επιβάλλει να είναι κλειστός ο δρόμος εξπρές (E^c) **και** ταυτόχρονα να μην ολοκληρώνεται η διαδρομή μέσω B. Αφού όμως έχουμε ήδη φτάσει στο B, για να μη φτάσουμε στο Γ πρέπει αναγκαστικά να είναι κλειστό το τμήμα $B \to \Gamma$ (ενδεχόμενο $B \nleftrightarrow \Gamma$).

Συνεπώς, το ενδεχόμενο αναλύεται στην ταυτόχρονη τομή:

$$(A \leftrightarrow B) \cap (A \nleftrightarrow \Gamma) = (A \leftrightarrow B) \cap (B \nleftrightarrow \Gamma) \cap E^c$$

Λόγω της στατιστικής ανεξαρτησίας των τριών αυτών τμημάτων, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(A \leftrightarrow B \mid A \nleftrightarrow \Gamma) &= \frac{P((A \leftrightarrow B) \cap (A \nleftrightarrow \Gamma))}{P(A \nleftrightarrow \Gamma)} \\ &= \frac{P(A \leftrightarrow B)P(B \nleftrightarrow \Gamma)P(E^c)}{P(A \nleftrightarrow \Gamma)} \\ &= \frac{(1-p^2)p^3}{[1-(1-p^2)^2]p} \\ &= \frac{(1-p^2)p^2}{1-(1-p^2)^2}. \end{aligned}$$

Τα αποτελέσματα των ερωτημάτων (β) και (γ) είναι ακριβώς τα ίδια.
Η πληροφορία ότι το σύστημα απέτυχε συνολικά ($A \nleftrightarrow \Gamma$) επιβάλλει αναγκαστικά ότι ο δρόμος εξπρές είναι κλειστός (E^c). Επειδή όμως ο δρόμος εξπρές είναι ανεξάρτητος από τους δρόμους του τμήματος $A \to B$, η κατάστασή του δεν προσφέρει καμία νέα πληροφορία σχετικά με το αν το τμήμα $A \to B$ είναι ανοιχτό ή κλειστό.

Άσκηση 5

Τρείς μηχανές Ι, ΙΙ και ΙΙΙ, συναρμολογούν το 30%, 30% και 40%, αντίστοιχα, του συνόλου των τηλεοράσεων μιας εταιρίας. Από αυτές το 4%, το 3% και το 2%, αντίστοιχα είναι ελαττωματικά. Επιλέγουμε τυχαία μια τηλεόραση από το σύνολο και ελέγχουμε εάν είναι ελαττωματική ή όχι.

(α) Ποια η πιθανότητα η τηλεόραση αυτή να είναι ελαττωματική·

(β) Εάν όντως είναι ελαττωματική, ποια η πιθανότητα να έχει κατασκευαστεί από την μηχανή Ι·

(γ) Η ίδια ερώτηση με το υποερώτημα (β), αυτή τη φορά για τις μηχανές ΙΙ και ΙΙΙ.

Λύση

(α) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα για την προέλευση της τηλεόρασης:

- I: Η τηλεόραση κατασκευάστηκε από τη μηχανή Ι, με $P(I) = 0{,}30$.
- II: Η τηλεόραση κατασκευάστηκε από τη μηχανή ΙΙ, με $P(II) = 0{,}30$.
- III: Η τηλεόραση κατασκευάστηκε από τη μηχανή ΙΙΙ, με $P(III) = 0{,}40$.

Τα ενδεχόμενα αυτά είναι ξένα μεταξύ τους και η ένωσή τους είναι ο δειγματικός χώρος ($0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}4 = 1$), επομένως αποτελούν μια διαμέριση του συνόλου. Επίσης η εκφώνηση μας δίνει τις δεσμευμένες πιθανότητες μια τηλεόραση να είναι ελαττωματική (γεγονός Ε) δεδομένου ότι έχει προέλθει από μία από τις μηχανές Ι, ΙΙ και ΙΙΙ: $P(E|I) = 0.04$, $P(E|II) = 0.03$ και $P(E|III) = 0.02$.

Πιθανότητα η τηλεόραση να είναι ελαττωματική ($P(E)$):

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap I) + P(E \cap II) + P(E \cap III) \\ &= P(E \mid I)P(I) + P(E \mid II)P(II) + P(E \mid III)P(III) \\ &= (0{,}04 \cdot 0{,}30) + (0{,}03 \cdot 0{,}30) + (0{,}02 \cdot 0{,}40) \\ &= 0{,}012 + 0{,}009 + 0{,}008 = 0{,}029 \end{aligned}$$

(β) Ζητείται η δεσμευμένη πιθανότητα $P(I \mid E)$. Εφαρμόζουμε τον κανόνα του Bayes:

$$P(I \mid E) = \frac{P(E \cap I)}{P(E)} = \frac{P(E \mid I)P(I)}{P(E)} = \frac{0{,}012}{0{,}029} = \frac{12}{29} \approx 0{,}4138$$

(γ) Πιθανότητες για τις μηχανές II και III:
Ομοίως, εφαρμόζοντας τον κανόνα του Bayes:

- Για τη μηχανή II:

$$P(II \mid E) = \frac{P(E \cap II)}{P(E)} = \frac{P(E \mid II)P(II)}{P(E)} = \frac{0{,}009}{0{,}029} = \frac{9}{29} \approx 0{,}3103$$

- Για τη μηχανή III:

$$P(III \mid E) = \frac{P(E \cap III)}{P(E)} = \frac{P(E \mid III)P(III)}{P(E)} = \frac{0{,}008}{0{,}029} = \frac{8}{29} \approx 0{,}2759$$

Άσκηση 6

Σε ένα κουτί υπάρχουν $n+1$ νομίσματα. Το νόμισμα i φέρνει κορώνα με πιθανότητα $\frac{i}{n}, i = 0, \ldots, n$. Διαλέγετε ένα νόμισμα στην τύχη και το στρίβετε.

α) Να δείξετε ότι η πιθανότητα να έρθει κορώνα είναι $\frac{1}{2}$.

β) Με δεδομένο ότι ήρθε κορώνα, να υπολογίσετε την πιθανότητα να διαλέξατε το κέρμα i.

Λύση

Έστω A_i το ενδεχόμενο να επιλεγεί το νόμισμα i, με $P(A_i) = \frac{1}{n+1}$ για κάθε $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, και K το ενδεχόμενο να έρθει κορώνα στη ρίψη.

α) Εφόσον τα A_i είναι ξένα και η ένωση τους μας δίνει το δειγματικό χώρο, από το θεώρημα της ολικής πιθανότητας ισχύει ότι,

$$P(K) = \sum_{i=0}^{n} P(K \mid A_i)P(A_i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}.$$

β) Από το θεώρημα του Bayes,

$$P(A_i \mid K) = \frac{P(K \mid A_i)P(A_i)}{P(K)} = \frac{\frac{i}{n}\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{2}} = \frac{2i}{n(n+1)}$$