ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2026-2027

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 1

Άσκηση 1

Αν A, B, C είναι τρία ενδεχόμενα, γράψτε τα σύνολα που περιγράφουν τα παρακάτω ενδεχόμενα:

α) Συμβαίνει τουλάχιστον ένα από τα A, B, C.

β) Δεν συμβαίνει κανένα από τα A, B, C.

γ) Συμβαίνει ακριβώς ένα από τα A, B, C.

δ) Συμβαίνει το πολύ ένα από τα A, B, C.

ε) Συμβαίνουν τουλάχιστον δύο από τα A, B, C.

στ) Συμβαίνουν το πολύ δύο από τα A, B, C.

ζ) Συμβαίνουν τα A και B, αλλά όχι το C.

Λύση

α) Το ενδεχόμενο 'τουλάχιστον ένα' είναι η ένωση των τριών:
$A \cup B \cup C$

β) Θέλουμε να μη συμβαίνει το A, ούτε το B, ούτε το C. Είναι το συμπλήρωμα του (α) και, από τον κανόνα De Morgan:
$(A \cup B \cup C)^c = A^c \cap B^c \cap C^c$

γ) Θα συμβεί μόνο το A, ή μόνο το B, ή μόνο το C:
$(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$

δ) Το πολύ ένα σημαίνει ακριβώς ένα ή κανένα, δηλαδή η ένωση των (γ) και (β):
$(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$

ε) Δύο τουλάχιστον από τα τρία συμβαίνουν ταυτόχρονα, άρα κάποιο από τα ζεύγη A, B ή A, C ή B, C συμβαίνει (η περίπτωση να συμβαίνουν και τα τρία περιέχεται σε κάθε τομή):
$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

στ) Το πολύ δύο σημαίνει ότι δεν συμβαίνουν και τα τρία μαζί:
$(A \cap B \cap C)^c = A^c \cup B^c \cup C^c$

ζ) Συμβαίνει το A, συμβαίνει το B και δεν συμβαίνει το C:
$A \cap B \cap C^c$

Άσκηση 2

Ρίχνουμε δύο φορές ένα δίκαιο εξάεδρο ζάρι.

α) Περιγράψτε τον δειγματικό χώρο του πειράματος.

β) Ονομάζουμε A το γεγονός ότι η πρώτη ρίψη φέρνει αριθμό μικρότερο από 3. Περιγράψτε το γεγονός A και υπολογίστε την πιθανότητά του, $P(A)$.

γ) Ονομάζουμε B το γεγονός ότι το άθροισμα των δύο ρίψεων είναι ίσο με 4. Περιγράψτε το γεγονός B και υπολογίστε την πιθανότητά του, $P(B)$.

δ) Ποιο είναι το ενδεχόμενο $A \cap B$; Υπολογίστε τις $P(A \cap B)$ και $P(A \cup B)$.

Λύση

α) Κάθε αποτέλεσμα του πειράματος είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος (a, b), όπου a η ένδειξη της 1ης ρίψης και b της 2ης:

$$\Omega = \{(a, b) : a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, 6), (2, 1), \ldots, (6, 6)\}, \qquad |\Omega| = 36.$$

Επειδή το ζάρι είναι δίκαιο, τα 36 απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, άρα για κάθε γεγονός E ισχύει $P(E) = \dfrac{|E|}{|\Omega|} = \dfrac{|E|}{36}$.

β) Η πρώτη ρίψη πρέπει να είναι 1 ή 2, η δεύτερη οτιδήποτε:

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\} = \{(a, b) \in \Omega : a \leq 2\}.$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

γ) Τα ζεύγη με άθροισμα 4 είναι:

$$B = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}, \qquad P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

δ) Το $A \cap B$ περιέχει τα ζεύγη του B που έχουν πρώτη ένδειξη 1 ή 2:

$$A \cap B = \{(1, 3), (2, 2)\}, \qquad P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

Για την ένωση χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$:

$$P(A \cup B) = \frac{12}{36} + \frac{3}{36} - \frac{2}{36} = \frac{13}{36}.$$

Πράγματι, το $A \cup B$ περιέχει τα 12 ζεύγη του A και επιπλέον το $(3, 1)$, δηλαδή 13 ζεύγη.

Άσκηση 3

Σε κατάστημα με σουβενίρ, ο ιδιοκτήτης εκτιμά ότι κάθε πελάτης αγοράζει είδος E με πιθανότητα $P(E) = 0{,}24$, αγοράζει είδος Δ με πιθανότητα $P(\Delta) = 0{,}61$, ενώ η πιθανότητα να αγοράσει και τα δύο είδη είναι $P(E \cap \Delta) = 0{,}11$.

α) Ποια είναι η πιθανότητα ένας τυχαίος πελάτης να αγοράσει τουλάχιστον ένα από τα δύο είδη;

β) Ποια είναι η πιθανότητα να αγοράσει μόνο το είδος Δ (και όχι το E);

Λύση

α) Το γεγονός «τουλάχιστον ένα από τα δύο είδη» είναι η ένωση $E \cup \Delta$. Από τον τύπο:

$$P(E \cup \Delta) = P(E) + P(\Delta) - P(E \cap \Delta) = 0{,}24 + 0{,}61 - 0{,}11 = 0{,}74.$$

β) Το γεγονός «μόνο Δ» είναι το $\Delta - E = \Delta \cap E^c$, δηλαδή αγοράζει Δ αλλά όχι E. Από την ιδιότητα $P(\Delta - E) = P(\Delta) - P(\Delta \cap E)$:

$$P(\Delta - E) = P(\Delta) - P(E \cap \Delta) = 0{,}61 - 0{,}11 = 0{,}50.$$

Άσκηση 4

Ο εκφωνητής του δελτίου καιρού δίνει τις ακόλουθες πιθανότητες για τον καιρό τις επόμενες δύο μέρες:

α) βροχή σήμερα: 0.3

β) βροχή αύριο: 0.5

γ) βροχή και σήμερα και αύριο: 0.2

δ) βροχή σήμερα ή αύριο: 0.7

Είναι αυτό το δελτίο καιρού συμβατό με τα Αξιώματα των Πιθανοτήτων;

Λύση

Έστω A το γεγονός ότι θα βρέξει σήμερα και B το γεγονός ότι θα βρέξει αύριο. Το γεγονός ότι θα βρέξει και σήμερα και αύριο είναι η τομή $A \cap B$, ενώ το γεγονός ότι θα βρέξει σήμερα ή αύριο είναι η ένωση $A \cup B$. Το δελτίο μάς δίνει:

$$P(A) = 0.3, \qquad P(B) = 0.5, \qquad P(A \cap B) = 0.2, \qquad P(A \cup B) = 0.7.$$

Από τις ιδιότητες των πιθανοτικών νόμων (που προκύπτουν από τα αξιώματα) ξέρουμε ότι για οποιαδήποτε γεγονότα A, B ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές του δελτίου:

$$P(A \cup B) = 0.3 + 0.5 - 0.2 = 0.6 \neq 0.7.$$

Η τιμή 0.7 που δίνει ο εκφωνητής για το γεγονός $A \cup B$ έρχεται σε αντίθεση με αυτή που προκύπτει από τις υπόλοιπες τρεις. Άρα το δελτίο **δεν** είναι συμβατό με τα Αξιώματα των Πιθανοτήτων.

Άσκηση 5

Τέσσερις ομάδες μετέχουν σε ένα τουρνουά: η Arsenal, η Chelsea, η Liverpool και η Everton. Η Arsenal έχει διπλάσια πιθανότητα να κερδίσει το τουρνουά απ΄ ό,τι η Liverpool, και η Chelsea έχει τέσσερις φορές μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει το τουρνουά απ΄ ό,τι η Everton. Αν η Arsenal έχει πέντε φορές μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει το τουρνουά απ΄ ό,τι η Everton, ποια είναι η πιθανότητα του γεγονότος ότι η Arsenal ή η Liverpool κερδίζουν το τουρνουά;

Λύση

Το πείραμα είναι η διεξαγωγή του τουρνουά και το αποτέλεσμά του είναι ο νικητής. Ο δειγματικός χώρος αποτελείται από τέσσερα απλά ενδεχόμενα:

$$\Omega = \{\mathrm{Ar},\ \mathrm{Ch},\ \mathrm{Li},\ \mathrm{Ev}\},$$

όπου Ar = {κερδίζει η Arsenal}, Ch = {κερδίζει η Chelsea}, Li = {κερδίζει η Liverpool}, Ev = {κερδίζει η Everton}. Τα απλά ενδεχόμενα είναι ξένα μεταξύ τους (μόνο μία ομάδα κερδίζει). Ο πιθανοτικός νόμος **δεν** είναι ομοιόμορφος. Πρέπει να τον προσδιορίσουμε από τα δεδομένα.
Από την εκφώνηση έχουμε τις σχέσεις

$$P(\mathrm{Ar}) = 2\,P(\mathrm{Li}), \qquad P(\mathrm{Ch}) = 4\,P(\mathrm{Ev}), \qquad P(\mathrm{Ar}) = 5\,P(\mathrm{Ev}).$$

Εκφράζουμε όλες τις πιθανότητες συναρτήσει της $p = P(\mathrm{Ev})$:

$$P(\mathrm{Ev}) = p, \qquad P(\mathrm{Ch}) = 4p, \qquad P(\mathrm{Ar}) = 5p, \qquad P(\mathrm{Li}) = \frac{P(\mathrm{Ar})}{2} = \frac{5p}{2}.$$

Από το αξίωμα της κανονικοποίησης, $P(\Omega) = 1$, και το αξίωμα της προσθετικότητας για ξένα γεγονότα:

$$1 = P(\Omega) = P(\mathrm{Ar}) + P(\mathrm{Ch}) + P(\mathrm{Li}) + P(\mathrm{Ev}) = 5p + 4p + \frac{5p}{2} + p = \frac{25p}{2} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{2}{25} = 0.08.$$

Άρα ο πιθανοτικός νόμος είναι:

$$P(\mathrm{Ar}) = \frac{10}{25} = 0.40, \qquad P(\mathrm{Ch}) = \frac{8}{25} = 0.32, \qquad P(\mathrm{Li}) = \frac{5}{25} = 0.20, \qquad P(\mathrm{Ev}) = \frac{2}{25} = 0.08.$$

Επαλήθευση: $0.40 + 0.32 + 0.20 + 0.08 = 1$.
Το ζητούμενο γεγονός είναι η ένωση $\mathrm{Ar} \cup \mathrm{Li}$. Επειδή τα δύο απλά ενδεχόμενα είναι ξένα,

$$P(\mathrm{Ar} \cup \mathrm{Li}) = P(\mathrm{Ar}) + P(\mathrm{Li}) = \frac{10}{25} + \frac{5}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0.6.$$

Άσκηση 6

Αν A, B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = 2x$ και $P(A \cup B) = 4x^2 + \frac{3}{4}$:

α) Να βρεθεί ο $x > 0$.

β) Είναι τα A και B ασυμβίβαστα;

Λύση

α) Από την ιδιότητα $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ και το γεγονός ότι $P(A \cap B) \geq 0$, προκύπτει ότι για οποιαδήποτε γεγονότα A, B ισχύει

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B).$$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα της άσκησης:

$$\begin{aligned} 4x^2 + \frac{3}{4} &\leq \frac{1}{2} + 2x \\ 16x^2 + 3 &\leq 2 + 8x \\ 16x^2 - 8x + 1 &\leq 0 \\ (4x-1)^2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Ένα τέλειο τετράγωνο δεν μπορεί να είναι αρνητικό, άρα αναγκαστικά $(4x-1)^2 = 0$, δηλαδή $x = \dfrac{1}{4}$.

Επαληθεύουμε: $P(B) = \frac{1}{2} \in [0,1]$ και $P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \in [0,1]$.

β) Δύο γεγονότα είναι ασυμβίβαστα αν $P(A \cap B) = 0$. Από τον τύπο:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0.$$

Άρα τα A και B είναι **ασυμβίβαστα**.