ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2026-2027

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 06/11/2026 Ημερομηνία Παράδοσης: 19/11/2026

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, **εδώ**.
- Για την παράδοση, σκανάρετε ή φωτογραφίστε τις κόλλες των ασκήσεών σας και φτιάξτε ένα PDF που θα περιλαμβάνει όλες τις λύσεις.
- **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΑ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΑ**· θολές εικόνες μπορεί να οδηγήσουν σε μηδενισμό.

Άσκηση 1

Έστω η τ.μ. X με Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας (ΣΜΠ)

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{c}, & \text{αν } x = -2, -1, 1, 2, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(α') Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς c.

(β') Υπολογίστε τη μέση τιμή $E[X]$ της τ.μ. X.

(γ') Ορίζουμε τη νέα τ.μ.

$$Z = (X - E[X])^2.$$

Βρείτε τη Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας $p_Z(z)$ της τ.μ. Z.

(δ') Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο ερώτημα, υπολογίστε τη διασπορά $var(X)$.

(ε') Επαληθεύστε το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας απευθείας τον ορισμό

$$var(X) = \sum_x (x - E[X])^2 p_X(x).$$

Άσκηση 2

Έστω μία τυχαία μεταβλητή X για την οποία γνωρίζουμε ότι

$$E[X] = 5.5 \qquad \text{και} \qquad var(X) = 8.25.$$

(α') Υπολογίστε το

$$E[(1 + X)^2].$$

(β') Υπολογίστε το

$$var(2X + 2026).$$

(γ') Υποθέστε ότι η X εκφράζει το αποτέλεσμα της ρίψης ενός δίκαιου δεκάεδρου ζαριού, με δυνατές τιμές

$$1, 2, \ldots, 10.$$

Βρείτε τη Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας της X και επαληθεύστε απευθείας τη μέση τιμή και τη διασπορά της.

Άσκηση 3

Ένας δέκτης λαμβάνει πακέτα δεδομένων που αποτελούνται από 12 bits το καθένα. Κάθε bit μεταδίδεται σωστά με πιθανότητα

$$p = 0.97,$$

ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα bits.
Ορίζουμε την τ.μ. X ως το πλήθος των λανθασμένων bits σε ένα πακέτο.

(α') Ποια κατανομή ακολουθεί η X και ποιες είναι οι παράμετροί της·

(β') Υπολογίστε τις πιθανότητες:

- $P(X = 0)$,
- $P(X = 1)$,
- $P(X \geq 2)$.

(γ') Υπολογίστε τη μέση τιμή $E[X]$ και τη διασπορά $var(X)$ της X.

(δ') Ο δέκτης λαμβάνει συνολικά 1000 τέτοια πακέτα. Ποιος είναι ο αναμενόμενος συνολικός αριθμός λανθασμένων bits που θα ληφθούν·

Άσκηση 4

Η πιθανότητα ένας συγκεκριμένος τύπος ηλεκτρονικού εξαρτήματος να είναι ελαττωματικός είναι 0.05.
Επιλέγουμε τυχαία 50 ανεξάρτητα εξαρτήματα και ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή X ως το πλήθος των ελαττωματικών εξαρτημάτων.

(α') Ποια κατανομή ακολουθεί ακριβώς η τ.μ. X·

(β') Ποια είναι η μέση τιμή $E[X]$·

(γ') Προσεγγίστε την κατανομή της X με μία κατανομή Poisson και προσδιορίστε την παράμετρο λ.

(δ') Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση Poisson, υπολογίστε την πιθανότητα να υπάρχουν το πολύ 2 ελαττωματικά εξαρτήματα.

Άσκηση 5

Ένα δίκαιο ζάρι ρίχνεται διαδοχικά. Ως επιτυχία θεωρούμε την εμφάνιση ενός από τους αριθμούς '5' ή '6'.
Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή Y ως τον αριθμό των ρίψεων που απαιτούνται μέχρι την πρώτη επιτυχία.

(α') Ποια κατανομή ακολουθεί η Y· Προσδιορίστε την παράμετρό της και γράψτε τη Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας $p_Y(y)$.

(β') Υπολογίστε:

- $P(Y = 1)$,

- $P(Y = 3)$,
- $P(Y \leq 4)$,
- $P(Y > 5)$.

(γ') Υπολογίστε τη μέση τιμή $E[Y]$ και τη διασπορά $var(Y)$.

(δ') Δεδομένου ότι δεν σημειώθηκε επιτυχία στις πρώτες 4 ρίψεις, υπολογίστε την πιθανότητα να απαιτηθούν συνολικά περισσότερες από 7 ρίψεις μέχρι την πρώτη επιτυχία.

(ε') Υποθέστε τώρα ότι συνεχίζουμε τις ρίψεις μέχρι να σημειωθούν δύο επιτυχίες. Ορίζουμε την τ.μ. T ως το συνολικό πλήθος των ρίψεων που απαιτούνται μέχρι τη δεύτερη επιτυχία. Ποια κατανομή ακολουθεί η T· Προσδιορίστε τις παραμέτρους της, γράψτε τη Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας και υπολογίστε τη μέση τιμή $E[T]$.

Άσκηση 6

Έστω οι διακριτές τυχαίες μεταβλητές

$$X \in \{0, 1\}, \qquad Y \in \{1, 2, 3\},$$

με από κοινού Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας

$$p_{X,Y}(x, y) = c(x + y + 1),$$

για

$$x \in \{0, 1\}, \qquad y \in \{1, 2, 3\},$$

όπου c είναι σταθερά.

(α') Υπολογίστε τη σταθερά c.

(β') Βρείτε τις περιθωριακές ΣΜΠ

$$p_X(x) \qquad \text{και} \qquad p_Y(y).$$

(γ') Υπολογίστε τις μέσες τιμές

$$E[X] \qquad \text{και} \qquad E[Y].$$

(δ') Υπολογίστε

$$E[2X + 3Y].$$

(ε') Είναι οι τ.μ. X και Y ανεξάρτητες· Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(ϛ') Υπολογίστε την πιθανότητα

$$P(X < Y).$$

Άσκηση 7

Απαντήστε στα παρακάτω ανεξάρτητα ερωτήματα.

(α') Έστω X τ.μ. που ακολουθεί κατανομή Poisson και έχει μέση τιμή

$$E[X] = 4.$$

Υπολογίστε το

$$E[X^2].$$

(β') Έστω Y γεωμετρική τ.μ. με

$$E[Y] = 5.$$

Υπολογίστε το

$$var(2 - 3Y).$$

(γ') Έστω Z ο αριθμός εμφανίσεων ενός γεγονότος A, με πιθανότητα εμφάνισης p, σε 100 ανεξάρτητες δοκιμές. Δεδομένου ότι το γεγονός A εμφανίστηκε ακριβώς 3 φορές στις πρώτες 8 δοκιμές, υπολογίστε

$$E[Z \mid A \text{ εμφανίστηκε 3 φορές στις πρώτες 8 δοκιμές}].$$

(δ') Έστω W ο αριθμός ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli που απαιτούνται μέχρι να συμβούν συνολικά 3 επιτυχίες, όταν η πιθανότητα επιτυχίας σε κάθε δοκιμή είναι p.

Ποια κατανομή ακολουθεί η W· Γράψτε τη Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας της W και υπολογίστε τη μέση τιμή $E[W]$.

Άσκηση 8 (Προγραμματιστική)

Χρησιμοποιώντας Python, μελετήστε προγραμματιστικά την προσέγγιση της Διωνυμικής κατανομής από την κατανομή Poisson.

(α') Για

$$n = 100, \qquad p = 0.1,$$

σχεδιάστε στο ίδιο διάγραμμα τη Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας της Διωνυμικής κατανομής

$$X \sim \text{Binomial}(100, 0.1)$$

και της κατανομής Poisson

$$Y \sim \text{Poisson}(10).$$

(β') Δημιουργήστε 1000 τυχαία δείγματα από τη Διωνυμική κατανομή και απεικονίστε το αντίστοιχο ιστόγραμμα.

(γ') Επαναλάβετε τη σύγκριση για τις περιπτώσεις

$$(n, p) = (50, 0.2),$$

$$(n, p) = (500, 0.02),$$

και

$$(n, p) = (1000, 0.01).$$

Σε κάθε περίπτωση χρησιμοποιήστε για την Poisson την παράμετρο

$$\lambda = np.$$

(δ') Συγκρίνετε τα αποτελέσματα των παραπάνω περιπτώσεων. Σε ποιες περιπτώσεις η κατανομή Poisson προσεγγίζει καλύτερα τη Διωνυμική κατανομή· Αιτιολογήστε την απάντησή σας με βάση τις τιμές των n και p.

Μαζί με τον κώδικά σας, παραδώστε τα διαγράμματα που παράξατε και σύντομα σχόλια για τα αποτελέσματα.