ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2026-27
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 22/10/2026 Ημερομηνία Παράδοσης: 05/11/2026

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, **εδώ**. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1

Πόσοι δυνατοί κωδικοί 7 χαρακτήρων μπορούν να δημιουργηθούν εάν:

(α) Χρησιμοποιούμε μόνο κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου και το ίδιο γράμμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί πολλές φορές.

(β) Χρησιμοποιούμε μόνο κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου, όλα διαφορετικά μεταξύ τους.

(γ) Χρησιμοποιούμε μόνο κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου και ψηφία.

(δ) Χρησιμοποιούμε μόνο το γράμμα Κ και το ψηφίο 2.

(ε) Χρησιμοποιήσουμε μόνο τα γράμματα Κ και 2 και τα περιλάβουμε και τα δύο.

Άσκηση 2

Ένα άτομο έχει 8 φίλους, 5 από τους οποίους θέλει να καλέσει σε ένα πάρτι. Πόσες επιλογές έχει, αν:

(α) 2 από τους φίλους του έχουν μαλώσει, και δεν γίνεται να προσκληθούν συγχρόνως;

(β) 2 από τους φίλους του είναι ζευγάρι, και πρέπει να προσκληθούν συγχρόνως;

Άσκηση 3

Το μάθημα των Πιθανοτήτων παρακολουθούν 100 φοιτητές, εκ των οποίων 40 είναι αγόρια και οι υπόλοιποι είναι κορίτσια. Για την καλύτερη δυνατή προετοιμασία τους εν όψει της εξέτασης του μαθήματος, σχεδιάζουν να διαβάσουν σε ομάδες εργασίας.

(α) Αν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής, με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί μια 5-μελής ομάδα εργασίας;

(β) Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί μια 5-μελής ομάδα εργασίας, αν πρέπει να υπάρχουν σε αυτή 2 αγόρια και 3 κορίτσια;

(γ) Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί μια 5-μελής ομάδα εργασίας, αν πρέπει να υπάρχουν σε αυτή 4 αγόρια και 1 κορίτσι;

(δ) Ποια η πιθανότητα να επιλέξουμε μόνο αγόρια;

Άσκηση 4

Ρίχνουμε 3 τίμια κέρματα. Έστω X η τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) που δείχνει πόσες φορές εμφανίστηκε κορώνα. Να βρεθούν οι τιμές που παίρνει η τ.μ. X και να υπολογιστεί η Συνάρτηση Πιθανότητας (Μάζας) (PMF), $p_X(x)$, αυτής. Αποδείξτε ότι η $p_X(x)$ είναι μία έγκυρη Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας.

Άσκηση 5

Ένα δυαδικό δέντρο αναζήτησης (Binary Search Tree - BST) είναι μία δομή δεδομένων στην οποία, για κάθε κόμβο, οι τιμές στο αριστερό υποδέντρο είναι μικρότερες και οι τιμές στο δεξί υποδέντρο είναι μεγαλύτερες από την τιμή του κόμβου. Ένα δυαδικό δέντρο αναζήτησης ονομάζεται πλήρως εκφυλισμένο completely degenerate όταν κάθε κόμβος έχει το πολύ ένα παιδί. Θεωρούμε ότι εισάγουμε τους ακέραιους αριθμούς $1, 2, \ldots, n$ σε ένα αρχικά κενό δυαδικό δέντρο αναζήτησης, με τυχαία σειρά. Υποθέτουμε ότι όλες οι δυνατές σειρές εισαγωγής είναι ισοπίθανες.

(α) Να υπολογίσετε, ως συνάρτηση του n, την πιθανότητα το δέντρο που θα προκύψει να είναι completely degenerate.

(β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του (α), να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του n για την οποία η πιθανότητα σχηματισμού ενός completely degenerate δέντρου είναι μικρότερη από 0.01 (δηλαδή 1%).

Άσκηση 6

Θεωρούμε το αγγλικό αλφάβητο, το οποίο αποτελείται από 26 διαφορετικά γράμματα. Ονομάζουμε norepeatword μια ακολουθία από τουλάχιστον 1 και το πολύ 26 γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου, στην οποία δεν επιτρέπεται η επανάληψη γραμμάτων. Για παράδειγμα, η λέξη `course` είναι μια τέτοια ακολουθία, ενώ η λέξη `statistics` δεν είναι, καθώς περιέχει επαναλαμβανόμενα γράμματα. Η σειρά των γραμμάτων έχει σημασία. Επομένως, οι ακολουθίες `course` και `source` θεωρούνται διαφορετικές. Δεν είναι απαραίτητο οι ακολουθίες να αποτελούν λέξεις με νόημα.
Επιλέγουμε τυχαία μία από όλες τις δυνατές τέτοιες ακολουθίες, θεωρώντας ότι όλες είναι ισοπίθανες, ανεξάρτητα από το πλήθος των γραμμάτων τους. Να δείξετε ότι η πιθανότητα η επιλεγμένη ακολουθία να περιέχει και τα 26 γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου είναι πολύ κοντά στην τιμή $\frac{1}{e}$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το ανάπτυγμα Taylor της εκθετικής συνάρτησης:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Άσκηση 7

Ένα σώμα 3 δικαστών πρέπει να πάρει μία απόφαση υπέρ ή κατά. Η απόφαση παίρνεται κατά πλειοψηφία. Κάθε δικαστής ψηφίζει, μυστικά και ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους, υπέρ με πιθανότητα p.
Ορίζουμε το γεγονός M ότι η απόφαση του σώματος είναι υπέρ (δηλαδή, η πλειοψηφία των δικαστών ψήφισε υπέρ), και το γεγονός A ότι ο πρώτος δικαστής ψήφισε υπέρ.

(α) Τι κατανομή ακολουθεί η τ.μ. X, ο αριθμός των δικαστών που ψηφίζει υπέρ;

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(M)$.

(γ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(M \mid A)$.