ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2026-2027

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 07/10/2026 Ημερομηνία Παράδοσης: 21/10/2026

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

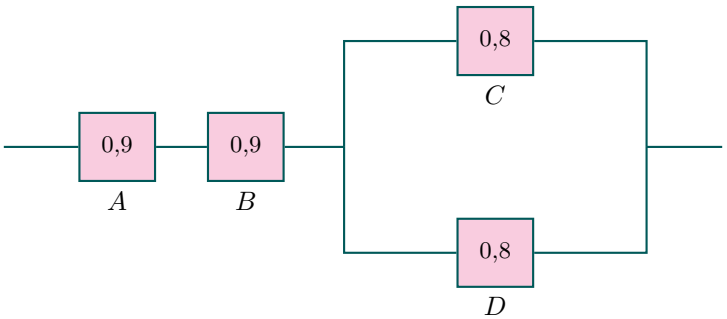
- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, **εδώ**. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1

Ένα ηλεκτρικό σύστημα αποτελείται από 4 εξαρτήματα, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους όπως στο σχήμα 1. Το σύστημα θα λειτουργεί, αν λειτουργούν τα εξαρτήματα A και B και λειτουργεί τουλάχιστον ένα εκ των εξαρτημάτων C και D. Η αξιοπιστία (δηλαδή η πιθανότητα λειτουργίας) κάθε εξαρτήματος δίνεται από το σχήμα. Να υπολογίσετε την πιθανότητα:

α) το σύστημα να λειτουργεί.

β) να μην λειτουργεί το εξάρτημα C, ενώ το σύστημα λειτουργεί.



Σχήμα 1: Ηλεκτρικό σύστημα

Άσκηση 2

i) Ένα κουτί περιέχει 15 κόκκινες και 5 άσπρες μπάλες. Επιλέγουμε τυχαία 2 μπάλες, χωρίς επανάθεση. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

   α) Και οι 2 επιλεγμένες μπάλες είναι άσπρες.

   β) Η 1η επιλεγμένη μπάλα είναι κόκκινη και η 2η επιλεγμένη μπάλα είναι άσπρη.

ii) Ένα στα 1000 άτομα ενός πληθυσμού πάσχει από μία ασθένεια. Η εξέταση που πραγματοποιείται για τη διάγνωση της ασθένειας δίνει λάθος διάγνωση στο 1% των περιπτώσεων, αν το άτομο που υποβάλλεται στην εξέταση πάσχει όντως από την ασθένεια, και στο 2%, αν το άτομο που υποβάλλεται στην εξέταση δεν πάσχει από την ασθένεια.

   α) Να βρεθεί η πιθανότητα θετικού αποτελέσματος εξέτασης σε κάποιο άτομο του πληθυσμού.

   β) Αν για κάποιο άτομο του πληθυσμού η εξέταση ήταν θετική, να υπολογιστεί η πιθανότητα αυτό να πάσχει πράγματι από την ασθένεια.

Άσκηση 3

Ένα ψηφιακό σύστημα επικοινωνίας μεταδίδει δυαδικά ψηφία (0 ή 1) μέσω ενός συμμετρικού θορυβώδους καναλιού. Κάθε μπιτ μεταδίδεται λανθασμένα με πιθανότητα $p = 0{,}08$, ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα μπιτ. Ο πομπός εκπέμπει το σύμβολο 0 με πιθανότητα 0,6 και το σύμβολο 1 με πιθανότητα 0,4. Για να μειωθεί η πιθανότητα σφάλματος, κάθε μπιτ αποστέλλεται 3 φορές (δηλαδή το 0 στέλνεται ως 000 και το 1 ως 111) και ο δέκτης αποκωδικοποιεί κατά πλειοψηφία (αποφασίζει 0 αν λάβει τουλάχιστον δύο μηδενικά, και 1 αν λάβει τουλάχιστον δύο μονάδες).

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ένα μπιτ 0 να αποκωδικοποιηθεί λανθασμένα ως 1.

β) Να υπολογίσετε τη συνολική πιθανότητα σφάλματος αποκωδικοποίησης ενός τυχαία επιλεγμένου μπιτ που εκπέμπεται από την πηγή.

γ) Εάν ο δέκτης λαμβάνει την ακολουθία 010, ποια είναι η πιθανότητα να είχε σταλεί πράγματι το σύμβολο 0;

Άσκηση 4

Ρίχνουμε δύο δίκαια και ανεξάρτητα τετράεδρα ζάρια (με έδρες $\{1, 2, 3, 4\}$). Ορίζουμε τα ακόλουθα γεγονότα:

- A: Το αποτέλεσμα του πρώτου ζαριού είναι άρτιος αριθμός.
- B: Το αποτέλεσμα του δεύτερου ζαριού είναι άρτιος αριθμός.
- C: Το άθροισμα των αποτελεσμάτων των δύο ζαριών είναι άρτιος αριθμός.

α) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$ και $P(C)$.

β) Να εξετάσετε αν τα γεγονότα A, B και C είναι ανά δύο ανεξάρτητα.

γ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A \cap B \cap C)$ και να δείξετε αν τα γεγονότα A, B, C είναι από κοινού ανεξάρτητα.

Άσκηση 5

Σε ένα εργαστήριο υπάρχουν δύο όμοια στην όψη νομίσματα:

- Το νόμισμα N_1 είναι δίκαιο, δηλαδή φέρνει κεφαλή με πιθανότητα $p_1 = 0{,}5$.
- Το νόμισμα N_2 είναι πειραγμένο και φέρνει κεφαλή με πιθανότητα $p_2 = 0{,}8$.

Επιλέγουμε στην τύχη ένα από τα δύο νομίσματα (με πιθανότητα $1/2$) και το ρίχνουμε επανειλημμένα. Έστω K_i το ενδεχόμενο η i-οστή ρίψη να φέρει κεφαλή.

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(K_1)$ και την πιθανότητα $P(K_1 \cap K_2)$.

β) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα K_1 και K_2 είναι ανεξάρτητα. Είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητα αν γνωρίζουμε ποιο νόμισμα επιλέχθηκε;

γ) Υποθέστε ότι πραγματοποιούνται n ρίψεις με το επιλεγμένο νόμισμα και όλες καταλήγουν σε κεφαλή ($K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_n$). Να υπολογίσετε την πιθανότητα να έχουμε επιλέξει το νόμισμα N_2 συναρτήσει του n. Τι συμβαίνει με την πιθανότητα αυτή καθώς το $n \to \infty$;

Άσκηση 6

Δύο παίκτες, ο A και ο B, ρίχνουν εναλλάξ ένα δίκαιο 6-εδρο ζάρι, ξεκινώντας ο παίκτης A. Νικητής αναδεικνύεται ο πρώτος που θα φέρει αποτέλεσμα 5 ή 6.

α) Ποια είναι η πιθανότητα να νικήσει ο παίκτης A στην πρώτη του ρίψη;

β) Ποια είναι η πιθανότητα το παιχνίδι να διαρκέσει το πολύ 4 ρίψεις συνολικά;

γ) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας, να υπολογίσετε την πιθανότητα να κερδίσει τελικά το παιχνίδι ο παίκτης A.

δ) Δεδομένου ότι ο παίκτης A δεν κέρδισε στην πρώτη του ρίψη, ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα να κερδίσει τελικά το παιχνίδι;