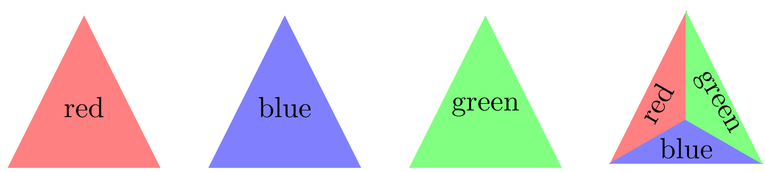
Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Λύσεις Προόδου
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
22 Νοεμβρίου 2025

Θέμα 1 - 20 μονάδες. Βασικές Έννοιες

Ένα τετράεδρο έχει τις 4 πλευρές του βαμμένες όπως φαίνεται στο Σχήμα 1: μία είναι βαμμένη όλη κόκκινη, μία είναι μπλε, μία πράσινη και μία βαμμένη κόκκινη, μπλε και πράσινη. Ρίχνουμε το τετράεδρο και η πιθανότητα μία οποιαδήποτε πλευρά του να ακουμπάει στο πάτωμα είναι ίση με $\frac{1}{4}$. Ορίζουμε τα εξής γεγονότα:

$$
\begin{aligned}
R &= \{\text{Η πλευρά που ακουμπάει στο πάτωμα περιέχει το κόκκινο χρώμα}\} \\
B &= \{\text{Η πλευρά που ακουμπάει στο πάτωμα περιέχει το μπλε χρώμα}\} \\
G &= \{\text{Η πλευρά που ακουμπάει στο πάτωμα περιέχει το πράσινο χρώμα}\}
\end{aligned}
$$



Σχήμα 1: Οι 4 πλευρές του τετράεδρου του πρώτου θέματος.

(α) Υπολογίστε τις πιθανότητες των γεγονότων R, B και G.
(β) Είναι τα γεγονότα R, B και G *ανά δύο* ανεξάρτητα;
(γ) Είναι τα γεγονότα R, B και G ανεξάρτητα;

Λύση:

(α) Προφανώς, $P(R) = P(B) = P(G) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, καθώς οι 2 στις 4 πλευρές του τετράεδρου περιέχουν κόκκινο, μπλε ή πράσινο χρώμα.

(β) Σαφώς, $P(R \cap G) = P(G \cap B) = P(B \cap R) = \frac{1}{4}$, καθώς μόνο η τέταρτη πλευρά περιέχει ταυτόχρονα 2 χρώματα. Καθώς,

$$
\begin{aligned}
P(R \cap G) &= \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(R) \cdot P(G) \\
P(G \cap B) &= \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(G) \cdot P(B) \\
P(B \cap R) &= \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(B) \cdot P(R)
\end{aligned}
$$

τα γεγονότα R, B, G είναι ανεξάρτητα ανά δύο.

(γ) $P(R \cap B \cap G) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(R) \cdot P(G) \cdot P(G)$. Συνεπώς, τα γεγονότα R, B, G <u>δεν</u> είναι ανεξάρτητα.

Θέμα 2 - 20 μονάδες. Συνδυαστική

Έστω ότι πρέπει να τοποθετήσουμε 90 ξεχωριστούς servers σε δύο ράφια ενός datacenter: το ράφι A έχει 60 διακριτές θέσεις (slots) και το ράφι B έχει 40 θέσεις. (Ενδιαφερόμαστε ποιος server πάει σε ποιο ράφι και σε ποιο ακριβές slot κάθε ραφιού.)

(α) Πόσοι είναι όλοι οι δυνατοί τρόποι τοποθέτησης των 90 servers στα δύο ράφια;

(β) Αν από τους 90 servers οι 50 είναι μοντέλα τύπου-G και οι 40 τύπου-X, πόσοι είναι οι δυνατοί τρόποι τοποθέτησης όλων των servers στα δύο ράφια υπό την προϋπόθεση ότι όλα τα μοντέλα τύπου-X βρίσκονται στο ίδιο ράφι;

Λύση:

(α) Έχουμε την τοποθέτηση $k = 90$ διαφορετικών αντικειμένων (οι διαφορετικοί servers) σε $n = 100 = 60 + 40$ διαφορετικές θέσεις (slots) στα δύο ράφια, όπου κάθε θέση λαμβάνει το πολύ ένα αντικείμενο. Για τον πρώτο server έχουμε 100 θέσεις διαθέσιμες, για τον δεύτερο server έχουμε 99 θέσεις διαθέσιμες και τελικά για τον 90-στό server έχουμε 11 θέσεις διαθέσιμες. Άρα έχουμε $P(100, 90) = \frac{100!}{(100-90)!} = \frac{100!}{10!}$ διαφορετικές τοποθετήσεις των servers.

(β) Εξετάζουμε δύο αμοιβαία αποκλειόμενες περιπτώσεις:

1) Όλοι οι 40 servers τύπου-X τοποθετούνται στο ράφι A που έχει 60 θέσεις. Όπως στο ερώτημα (α), αυτό γίνεται με $P(60, 40)$ διαφορετικούς τρόπους. Τώρα μας μένουν 60 θέσεις (20 θέσεις στο ράφι A και 40 θέσεις στο ράφι B), στις οποίες τοποθετούμε τα 50 μοντέλα τύπου-G. Έχουμε $P(60, 50)$ δυνατούς τρόπους τοποθέτησης των 50 servers τύπου-G σε αυτές τις θέσεις. Άρα, από τη βασική αρχή της απαρίθμησης, το συνολικό πλήθος των τοποθετήσεων στην περίπτωση (1) είναι $P(60, 40) \cdot P(60, 50)$.

2) Όλοι οι 40 servers τύπου-X τοποθετούνται στο ράφι B που έχει 40 θέσεις. Αυτό γίνεται με $P(40, 40)$ τρόπους. Τώρα μας μένουν 60 θέσεις στο ράφι A στις οποίες τοποθετούμε τα 50 μοντέλα τύπου-G με $P(60, 50)$ τρόπους. Άρα, από τη βασική αρχή της απαρίθμησης, το συνολικό πλήθος των τοποθετήσεων στην περίπτωση (2) είναι $P(40, 40) \cdot P(60, 50)$.

Αφού οι περιπτώσεις (1) και (2) είναι αμοιβαία αποκλειόμενες, έχουμε ότι το συνολικό πλήθος των τοποθετήσεων είναι $P(60, 40) \cdot P(60, 50) + P(40, 40) \cdot P(60, 50) = \frac{60!}{20!}\frac{60!}{10!} + 40!\frac{60!}{10!}$.

Θέμα 3 - 20 μονάδες. Ολική πιθανότητα και Bayes

Η Σοφία περνά μπροστά από ένα κουτί που περιέχει δύο ειδών σοκολάτες: ΙΟΝ γάλακτος και ΙΟΝ αμυγδάλου. Στο κουτί υπάρχουν τρεις φορές περισσότερες ΙΟΝ γάλακτος από ΙΟΝ αμυγδάλου. Η Σοφία επιλέγει μία σοκολάτα στην τύχη. Αν επιλέξει μία ΙΟΝ γάλακτος, την τρώει με πιθανότητα $1/5$. Αν επιλέξει μία ΙΟΝ αμυγδάλου, την τρώει με πιθανότητα $2/5$.

(α) Με ποια πιθανότητα η Σοφία τρώει τη σοκολάτα που επέλεξε;

(β) Δεδομένου ότι η Σοφία έφαγε τη σοκολάτα, ποια είναι η πιθανότητα ότι αυτή ήταν μία ΙΟΝ αμυγδάλου;

Λύση:

Ορίζουμε τα γεγονότα

$B =$ {Η Σοφία τρώει τη σοκολάτα}
$A =$ {Η σοκολάτα είναι ΙΟΝ γάλακτος}
$A^c =$ {Η σοκολάτα είναι ΙΟΝ αμυγδάλου}

Από την εκφώνηση έχουμε ότι $P(A) = \dfrac{3}{4}\,,\;\; P(A^c) = \dfrac{1}{4}\,,\;\; P(B|A) = \dfrac{1}{5}\,,\;\; P(B|A^c) = \dfrac{2}{5}$

(α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας:

$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(A^c) \cdot P(B|A^c) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{4} = 0.25$$

(β) Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Bayes:

$$P(A^c|B) = \frac{P(A^c) \cdot P(B|A^c)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{5} = 0.4$$

Θέμα 4 - 25 μονάδες. Δοκιμές Bernoulli και συναρτήσεις τ.μ.

Ένα σώμα 3 δικαστών πρέπει να πάρει μία απόφαση *υπέρ* ή *κατά*. Η απόφαση παίρνεται κατά πλειοψηφία. Κάθε δικαστής ψηφίζει, μυστικά και ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους, *υπέρ* με πιθανότητα p. Ορίζουμε το γεγονός M ότι η απόφαση του σώματος είναι *υπέρ* (δηλαδή, η πλειοψηφία των δικαστών ψήφισε *υπέρ*), και το γεγονός A ότι ο πρώτος δικαστής ψήφισε *υπέρ*.

(α) Τι κατανομή ακολουθεί η τ.μ. X, ο αριθμός των δικαστών που ψηφίζει *υπέρ*; Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός των δικαστών που ψηφίζουν *υπέρ*;

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(M)$.

(γ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(M/A)$.

(δ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(A/M)$. Δώστε τη γραφική παράσταση της $P(A/M)$ ως συνάρτηση του p. Ποια είναι τα όρια της $P(A/M)$ καθώς $p \to 0$ και $p \to 1$. Με δύο προτάσεις σχολιάστε αυτά τα όρια.

Λύση:

(α) Από την εκφώνηση είναι προφανές ότι η τ.μ. X ακολουθεί Διωνυμική κατανομή: $X \sim \Delta(n = 3, p)$. Ο αναμενόμενος αριθμός δικαστών που ψηφίζουν υπέρ είναι $E[X] = 3p$.

(β) Καθώς το σώμα αποφασίζει κατά πλειοψηφία, η απόφαση είναι "υπέρ" αν τουλάχιστον 2 στους 3 δικαστές αποφασίσουν "υπέρ":

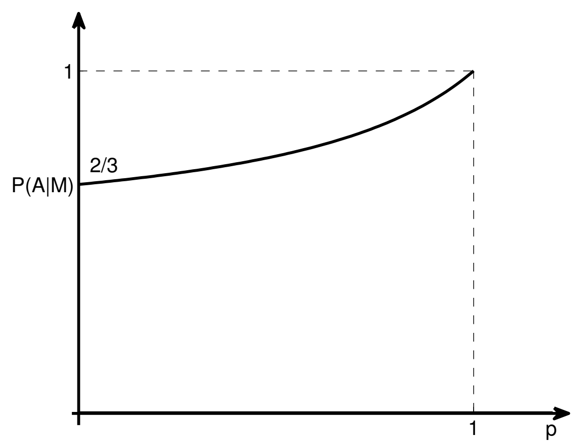
$$\begin{aligned} P(M) = P(X \geq 2) &= P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= \binom{3}{2} p^2 (1-p)^1 + \binom{3}{3} p^3 (1-p)^0 \\ &= 3p^2 - 2p^3 \end{aligned}$$

(γ) Δεδομένου του A, ότι ο πρώτος δικαστής ψήφισε "υπέρ", η απόφαση του σώματος είναι "υπέρ" αν ένας τουλάχιστον από τους άλλους δύο δικαστές ψήφισαν "υπέρ". Επομένως,

$$
\begin{aligned}
P(M|A) &= \binom{2}{1} p(1-p) + \binom{2}{2} p^2 (1-p)^0 \\
&= 2p(1-p) + p^2 \\
&= 2p - p^2
\end{aligned}
$$

(δ) Ζητάμε την πιθανότητα του γεγονότος ο πρώτος δικαστής να ψηφίσει "υπέρ" δεδομένου ότι το σώμα ψήφισε "υπέρ". Χρησιμοποιούμε τον κανόνα του Bayes:

$$P(A|M) = \frac{P(A) \cdot P(M|A)}{P(M)} = \frac{p(2p - p^2)}{3p^2 - 2p^3} = \frac{2-p}{3-2p}$$



Το όριο καθώς $p \to 0$ είναι $P(A|M) = 2/3$. Αυτό έχει νόημα καθώς όταν το p είναι πολύ μικρό, ο πιο πιθανός τρόπος το σώμα να κατάλήξει σε "υπέρ" είναι οι δύο δικαστές να ψηφίσουν "υπέρ" και ο ένας "κατά", οπότε και η δεσμευμένη πιθανότητα ο πρώτος να ψηφίσει "υπέρ" τείνει στο $2/3$.

Το όριο καθώς $p \to 1$ είναι $P(A|M) = 1$. Πράγματι, καθώς $p \to 1$, τότε με πιθανότητα 1 και οι 3 δικαστές ψηφίζουν "υπέρ". Επομένως $P(M) \to 1$ και παίρνουμε τη δεσμευμένη πιθανότητα του A ως προς ένα γεγονός (το M) με πιθανότητα κοντά στο 1. Σε αυτή την περίπτωση $P(A|M) \approx P(A) = p \to 1$.

Θέμα 5 - 25 μονάδες. Από κοινού κατανομές

Οι διακριτές ομοιόμορφες τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και παίρνουν ως τιμές τους τέσσερις ακέραιους αριθμούς $\{1, 2, 3, 4\}$. Υπολογίστε τα ακόλουθα:

(α) $E[X]$

(β) $E[XY]$

(γ) Από κοινού κατανομή των X και Y

(δ) Δεσμευμένη κατανομή της X δεδομένου του γεγονότος $A = \{XY = 4\}$, δηλαδή τις πιθανότητες $P(X = k/XY = 4)$ για $k = 1, 2, 3, 4$.

Λύση:

(α) $E[X] = \frac{1+2+3+4}{4} = 2.5 = E[Y]$

(β) $E[XY] = E[X] * E[Y] = (2.5)^2$ (X,Y ανεξάρτητες)

(γ) Καθώς οι τ.μ. X Y είναι ανεξάρτητες, η από κοινού κατανομή τους δίνεται ως το γινόμενο των οριακών:

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y) = 1/16 \;\text{ για }\; x,y = 1,2,3,4.$$

(δ) Στην ουσία ζητάμε τη δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X ως προς το γεγονός $A = \{XY = 4\}$. Εξ ορισμού: $p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X=x\}\cap A)}{P(A)}$.

Τώρα, $A = \{XY = 4\} = \{X = 1, Y = 4\} \cup \{X = 4, Y = 1\} \cup \{X = 2, Y = 2\}$, με τα 3 ενδεχόμενα αυτά να είναι ξένα μεταξύ τους, έτσι:

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(X = 1, Y = 4) + P(X = 4, Y = 1) + P(X = 2, Y = 2) \\
&= p_{XY}(1,4) + p_{XY}(4,1) + p_{XY}(2,2) \\
&= p_X(1)p_Y(4) + p_X(4)p_Y(1) + p_X(2)p_Y(2) \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{4} = \frac{3}{16}
\end{aligned}$$

Επίσης για:

$$\begin{aligned}
x &= 1,\; P(\{X = 1\} \cap A) = P(\{X = 1, Y = 4\}) = \frac{1}{16} \\
x &= 2,\; P(\{X = 2\} \cap A) = P(\{X = 2, Y = 2\}) = \frac{1}{16} \\
x &= 3,\; P(\{X = 3\} \cap A) = P(\emptyset) = 0 \\
x &= 4,\; P(\{X = 4\} \cap A) = P(\{X = 1, Y = 1\}) = \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

Έτσι

$$P(X = k|XY = 4) = \begin{cases} 1/3 & k = 1,2,4 \\ 0 & k = 3 \end{cases}$$