

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Λύσεις Προόδου
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
23 Νοεμβρίου 2024

Θέμα 1 - 20 μονάδες. Βασικές Έννοιες

Το 55% των φοιτητών ενός Τμήματος είναι γυναίκες, εκ των οποίων τα $4/5$ έχουν μακριά μαλλιά. Το 45% των φοιτητών ενός Τμήματος είναι άνδρες, εκ των οποίων το $1/3$ έχουν μακριά μαλλιά. Ποια είναι η πιθανότητα ότι ένας τυχαία επιλεγμένος φοιτητής είναι γυναίκα ή έχει μακριά μαλλιά;

Λύση:

Ορίζουμε τα γεγονότα $F = \{\text{ο φοιτητής είναι γυναίκα}\}$, $M = \{\text{ο φοιτητής είναι άνδρας}\}$ και $LH = \{\text{ο φοιτητής έχει μακριά μαλλιά}\}$. Από την εκφώνηση μας δίδονται οι εξής πιθανότητες: $P(F) = 0.55$, $P(LH | F) = 4/5$, $P(M) = 0.45$ και $P(LH | M) = 1/3$. Μας ζητείται η πιθανότητα του γεγονότος $F \cup LH$. Γνωρίζουμε ότι:

$$P(F \cup LH) = P(F) + P(LH) - P(F \cap LH).$$

Χρησιμοποιώντας το ΘΟΠ:

$$P(LH) = P(F)P(LH | F) + P(M)P(LH | M) = 0.55 \times \frac{4}{5} + 0.45 \times \frac{1}{3} = 0.59.$$

Επίσης:

$$P(F \cap LH) = P(F)P(LH | F) = 0.55 \times \frac{4}{5} = 0.44.$$

Συνεπώς,

$$P(F \cup LH) = 0.55 + 0.59 - 0.44 = 0.7.$$

Θέμα 2 - 20 μονάδες. Συνδυαστική

Τοποθετούμε 25 μαύρες μπάλες σε ένα πλέγμα 5 επί 5, δηλαδή σε πέντε σειρές, με κάθε σειρά να περιέχει 5 μπάλες. Επιλέγουμε τυχαία 5 από τις μπάλες και τις βάφουμε κόκκινες.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα ότι οι κόκκινες μπάλες βρίσκονται σε διαφορετικές σειρές;

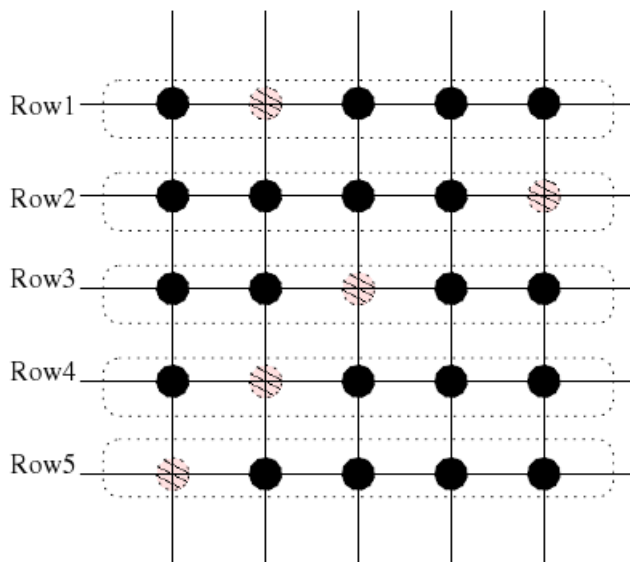
(β) Ποια είναι η πιθανότητα ότι οι κόκκινες μπάλες βρίσκονται σε διαφορετικές σειρές και διαφορετικές στήλες;

Λύση:

(α) Υπάρχουν συνολικά $25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 = 25!/20!$ τρόποι για να επιλέξουμε 5 μπάλες από ένα πλέγμα $5 \times 5 = 25$. Αυτό προκύπτει αν σκεφτούμε ότι αρχικά υπάρχουν 25 μπάλες να επιλέξουμε για την πρώτη μπάλα, στη συνέχεια 24 επιλογές για την δεύτερη κοκ. Αν τώρα θέλουμε να επιλέξουμε 5 μπάλες, αλλά να βρίσκονται σε διαφορετικές σειρές, το πλήθος των επιλογών μας

αλλάζει. Για την πρώτη μπάλα έχουμε 25 επιλογές, για την δεύτερη μπάλα δεν μπορούμε να επιλέξουμε μπάλες που βρίσκονται στην ίδια σειρά με την πρώτη μπάλα, άρα έχουμε $25 - 5 = 20$ επιλογές. Ομοίως για την τρίτη μπάλα, έχουμε $20 - 5 = 15$ επιλογές, εφόσον δεν μπορεί να είναι από την ίδια σειρά που πήραμε την πρώτη ή την δεύτερη μπάλα. Με παρόμοιο τρόπο προκύπτουν και τα πλήθη των δυνατών επιλογών και για τις υπόλοιπες μπάλες. Συνεπώς η ζητούμενη πιθανότητα να επιλέξουμε 5 μπάλες οι οποίες βρίσκονται σε διαφορετικές σειρές είναι:

$$\frac{25 \times 20 \times 15 \times 10 \times 5}{\frac{25!}{20!}} = 0.0588.$$



Σχήμα 1: Σχηματική αναπαράσταση για το ερώτημα (α) του θέματος 2.

(β) Κοιτάζοντας το 5×5 πλέγμα, υπάρχουν πέντε θέσεις για να επιλέξουμε την πρώτη μπάλα από την πρώτη σειρά. Για την δεύτερη μπάλα υπάρχουν τέσσερις θέσεις στην δεύτερη σειρά από τις οποίες μπορούμε να την επιλέξουμε. Ομοίως για την τρίτη μπάλα, υπάρχουν τρεις πιθανές θέσεις στην τρίτη σειρά και δύο θέσεις από την τέταρτη σειρά για την τέταρτη μπάλα. Τέλος, για την πέμπτη μπάλα υπάρχει μονάχα μια θέση στην πέμπτη σειρά που μπορούμε να την επιλέξουμε. Άρα ο συνολικός αριθμός θέσεων που μπορούμε να επιλέξουμε είναι: $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$. Παρατηρήστε ότι υπάρχουν $5!$ τρόποι για να ταξινομήσουμε τις πέντε σειρές. Άρα ο συνολικός αριθμός που μπορούμε να επιλέξουμε πέντε μπάλες έτσι ώστε να βρίσκονται σε διαφορετικές σειρές και διαφορετικές στήλες είναι: $5!5!$. Ο συνολικός αριθμός επιλογών πέντε μπαλών από τις 25 είναι $\frac{25!}{20!}$, άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{5!5!}{\frac{25!}{20!}} = 0.0023.$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος για να σκεφτούμε το ίδιο πρόβλημα είναι ο ακόλουθος: Για την πρώτη μπάλα έχουμε 25 πιθανές θέσεις από όπου μπορούμε να την επιλέξουμε. Αφήνοντας εκτός την σειρά και την στήλη από την οποία επιλέξαμε την πρώτη μπάλα, μας απομένουν 16 θέσεις επιλογής για την δεύτερη μπάλα. Ομοίως αφήνοντας εκτός την σειρά και την στήλη που επιλέξαμε την δεύτερη μπάλα μας μένουν 9 θέσεις επιλογής για την τρίτη μπάλα. Ομοίως προκύπτουν 4 θέσεις για την τέταρτη μπάλα και 1 θέση για την τελευταία μπάλα. Άρα το συνολικό πλήθος των τρόπων

που μπορούμε να επιλέξουμε τις 5 μπάλες από διαφορετικές σειρές και διαφορετικές στήλες είναι $25 \times 16 \times 9 \times 4 \times 1$. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{25 \times 16 \times 9 \times 4 \times 1}{\frac{25!}{20!}} = 0.0023.$$

Θέμα 3 - 20 μονάδες. Ολική πιθανότητα και Bayes

Έχουμε δύο δοχεία A και B. Το δοχείο A περιέχει 3 άσπρες και 2 κόκκινες σφαίρες ενώ το δοχείο B περιέχει 4 άσπρες και 6 κόκκινες σφαίρες. Ρίχνουμε ένα δίκαιο εξαέδρο ζάρι. Αν φέρουμε ρίψη μικρότερη ή ίση με 4, διαλέγουμε το δοχείο A, αλλιώς το δοχείο B. Στη συνέχεια βγάζουμε τυχαία μία σφαίρα. Να βρεθούν οι πιθανότητες:

(α) Να βγάλουμε κόκκινη σφαίρα.

(β) Να έχουμε επιλέξει το δοχείο B αν είναι γνωστό ότι η σφαίρα που βγάλαμε είναι κόκκινη.

(γ) Να βγάλουμε από το ίδιο δοχείο και δεύτερη κόκκινη σφαίρα δεδομένου ότι η πρώτη ήταν κόκκινη (υποθέστε δειγματοληψία χωρίς επανάθεση).

Λύση:

Ορίζουμε τα γεγονότα $A = \{\text{διαλέγουμε το δοχείο A}\}$, $B = \{\text{διαλέγουμε το δοχείο B}\}$ και $E_k = \{\text{Η k-στή σφαίρα που βγάζουμε είναι κόκκινη}\}$. Από την εκφώνηση, μας δίδεται ότι $P(A) = 4/6$, $P(B) = 2/6$, $P(E_1 | A) = 2/5$ και $P(E_1 | B) = 6/10$.

(α) Χρησιμοποιώντας το ΘΟΠ:

$$P(E_1) = P(A)P(E_1 | A) + P(B)P(E_1 | B) = \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{6}{10} = \frac{7}{15} = 0.4667.$$

(β) Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Bayes:

$$P(B | E_1) = \frac{P(B)P(E_1 | B)}{P(E_1)} = \frac{\frac{2}{6} \times \frac{6}{10}}{\frac{7}{15}} = \frac{3}{7} = 0.4286.$$

(γ) Μας ζητείται η πιθανότητα $P(E_2 | E_1)$. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(E_2 | E_1) &= \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} = \frac{P(A)P(E_1 \cap E_2 | A) + P(B)P(E_1 \cap E_2 | B)}{P(E_1)} \\ &= \frac{\frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{6} \times \frac{6}{10} \times \frac{5}{9}}{\frac{7}{15}} = \frac{8}{21} = 0.381. \end{aligned}$$

Θέμα 4 - 25 μονάδες. Δοκιμές Bernoulli και συναρτήσεις τ.μ.

Η εταιρία Ελληνικό Μετρό δημιουργεί τους συρμούς του νέου μετρό της Θεσσαλονίκης στη γραμμή Νέα Ελβετία-Σιδηροδρομικός Σταθμός με τον εξής αλγόριθμο: Στο μηχανοστάσιο της Νέας Ελβετίας υπάρχουν συνολικά 6 βαγόνια. Αν ένα βαγόνι λειτουργεί, τότε προστίθεται στο συρμό. Αν δεν λειτουργεί, τότε παραμένει στο μηχανοστάσιο. Ένα τυχαία επιλεγμένο βαγόνι λειτουργεί με πιθανότητα $2/3$, ανεξάρτητα από όλα τα υπόλοιπα. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X ως το μήκος του συρμού, δηλαδή το πλήθος των βαγονιών που τον αποτελούν.

(α) Ποια είναι η κατανομή της τ.μ. X ; Δώστε την πλήρη μαθηματική περιγραφή της συνάρτησης πιθανότητας της X .

(β) Ποιο είναι το αναμενόμενο μήκος του συρμού, $E[X]$;

(γ) Ποια είναι η πιθανότητα ότι δεν υπάρχει συρμός στη γραμμή Νέα Ελβετία-Σιδηροδρομικός Σταθμός;

(δ) Το πλήθος των επιβατών που μπορούν να χωρέσουν στο συρμό είναι ίσο με $50X$ (δηλαδή, κάθε βαγόνι χωρά 50 επιβάτες). Έστω Y η τ.μ. που περιγράφει το πλήθος των επιβατών που *θέλουν* να ταξιδέψουν με το συρμό. Η τ.μ. Y ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή μεταξύ 101 και 200, δηλαδή

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{100} & y = 101, 102, \dots, 199, 200 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος:

$$A = \{\text{ο συρμός μπορεί να μεταφέρει όλους τους επιβάτες που επιθυμούν να ταξιδέψουν}\}.$$

Λύση:

(α) Από την εκφώνηση, αναγνωρίζουμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί διωνυμική κατανομή με $n = 6$ και $p = 2/3$: $X \sim \Delta(n = 6, p = 2/3)$. Η σ.π. είναι:

$$P_X(k) = \binom{6}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{6-k}; \quad k = 0, 1, \dots, 6.$$

(β) $E[X] = np = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$ βαγόνια.

(γ) $P(\{\text{δεν υπάρχει συρμός}\}) = P(X = 0) = p_X(0) = \binom{6}{0} \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729} = 0.001372$.

(δ) Προφανώς το A συμβαίνει όταν $Y \leq 50X$. Καθώς η X παίρνει τις τιμές 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, η $50X$ παίρνει τις τιμές 0, 50, 100, 150, 200, 250, 300. Επίσης, η τ.μ. Y παίρνει τις τιμές 101, 102, ..., 200.

Παρατηρούμε τα εξής:

(i) Όταν ο συρμός έχει $X = 4, 5$, ή 6 βαγόνια είναι πάντα $Y \leq 50X$ και όλοι οι ταξιδιώτες εξυπηρετούνται.

(ii) Όταν ο συρμός έχει $X = 0, 1$, ή 2 βαγόνια $Y > 50X$ και δεν μπορούν να εξυπηρετηθούν *όλοι* οι ταξιδιώτες.

(iii) Όταν ο συρμός έχει $X = 3$ βαγόνια με χωρητικότητα $50X = 150$ επιβατών, τότε εξυπηρετούνται όλοι όταν $101 \leq Y \leq 150$.

Συνεπώς, από τα (i), (ii), (iii) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(X=3) \cdot P(101 \leq Y \leq 150) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) \\
 &= p_X(3) \cdot \sum_{i=101}^{150} \frac{1}{100} + p_X(4) + p_X(5) + p_X(6) \\
 &= \binom{6}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} + \binom{6}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{6}{5} \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right) + \binom{6}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 0.68.
 \end{aligned}$$

Θέμα 5 - 25 μονάδες. Από κοινού κατανομές

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y . Οι τιμές που αντιστοιχούν στις πιθανότητες $p_{X,Y}(-1, 1)$, $p_{X,Y}(0, -1)$ και $p_{X,Y}(0, 0)$ πρέπει να υπολογιστούν. Δίνεται ότι $p_X(-1) = 9/18$ και $P(|X| = |Y|) = 10/18$.

		X		
		$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$
Y	$y = -1$	3/18	;	0
	$y = 0$	4/18	;	2/18
	$y = 1$	;	1/18	3/18

(α) Υπολογίστε τις τιμές $p_{X,Y}(-1, 1)$, $p_{X,Y}(0, -1)$ και $p_{X,Y}(0, 0)$ που λείπουν.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα η τ.μ. X να παίρνει τιμές μικρότερες από την τ.μ. Y .

(γ) Υπολογίστε την οριακή σ.π. της τ.μ. X , $p_X(x)$. Ομοίως για την τ.μ. Y .

(δ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(Y = 0 \mid |X| = 1)$.

(ε) Προσδιορίστε τη δεσμευμένη σ.π. της Y δεδομένου ότι $X = 1$, $p_{Y|X}(y|x = 1)$. Υπολογίστε τη δεσμευμένη μέση τιμή της Y δεδομένου ότι $X = 1$, $E[Y|X = 1]$.

Λύση:

(α) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 p_x(-1) = \frac{9}{18} &\Rightarrow p_{X,Y}(-1, -1) + p_{X,Y}(-1, 0) + p_{X,Y}(-1, 1) = \frac{9}{18} \\
 &\Rightarrow \frac{3}{18} + \frac{4}{18} + p_{X,Y}(-1, 1) = \frac{9}{18} \Rightarrow p_{X,Y}(-1, 1) = \frac{2}{18}.
 \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}
 P(|X| = |Y|) = \frac{10}{18} &\Rightarrow p_{X,Y}(-1, -1) + p_{X,Y}(0, 0) + p_{X,Y}(1, 1) + p_{X,Y}(-1, 1) + p_{X,Y}(1, -1) = \frac{10}{18} \\
 &\Rightarrow \frac{3}{18} + p_{X,Y}(0, 0) + \frac{3}{18} + \frac{2}{18} + 0 = \frac{10}{18} \Rightarrow p_{X,Y}(0, 0) = \frac{2}{18}.
 \end{aligned}$$

Τέλος, η ιδιότητα κανονικοποίησης μας δίνει

$$\sum_x \sum_y p_{X,Y}(x, y) = 1 \Rightarrow p_{X,Y}(0, -1) = \frac{1}{18}.$$

Συνεπώς, η από κοινού σ.π. είναι:

		X		
		$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$
Y	$y = -1$	3/18	1/18	0
	$y = 0$	4/18	2/18	2/18
	$y = 1$	2/18	1/18	3/18

(β)

$$\begin{aligned}
 P(X < Y) &= p_{X,Y}(-1, 0) + p_{X,Y}(-1, 1) + p_{X,Y}(0, 1) \\
 &= \frac{4}{18} + \frac{2}{18} + \frac{1}{18} = \frac{7}{18} = 0.3889.
 \end{aligned}$$

(γ)

$$\begin{aligned}
 p_X(x) &= \sum_y p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{9}{18} & x = -1 \\ \frac{4}{18} & x = 0 \\ \frac{5}{18} & x = 1 \end{cases} \\
 p_Y(y) &= \sum_x p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{18} & y = -1 \\ \frac{8}{18} & y = 0 \\ \frac{6}{18} & y = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

(δ)

$$\begin{aligned}
 P(Y = 0 \mid |X| = 1) &= \frac{P(Y = 0 \cap \{X = -1 \cup X = 1\})}{P(X = -1 \cup X = 1)} \\
 &= \frac{p_{X,Y}(-1, 0) + p_{X,Y}(1, 0)}{p_X(-1) + p_X(1)} = \frac{4/18 + 2/18}{9/18 + 5/18} = \frac{3}{7} = 0.4286.
 \end{aligned}$$

(ε)

$$\begin{aligned}
 p_{Y|X}(y \mid x = 1) &= \frac{p_{X,Y}(1, y)}{p_X(1)} = \begin{cases} \frac{0}{5/18} = 0 & y = -1 \\ \frac{2/18}{5/18} = \frac{2}{5} & y = 0 \\ \frac{3/18}{5/18} = \frac{3}{5} & y = 1 \end{cases} \\
 E[Y \mid X = 1] &= \sum_y y p_{Y|X}(y \mid x = 1) = 0 \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5} = 0.6.
 \end{aligned}$$