ΗΥ-217 ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

21-1-2026

ΘΕΜΑ 1ο

Ορίζουμε τις τ.μ.:

X_1: διάρκεια αποστολής του πρώτου SMS : $X_1 \sim U[1,3]$

X_2: -//- δεύτερου SMS : $X_2 \sim U[1,3]$

Y: -//- του MMS : $Y \sim exp(\lambda = 1/8)$

Z: συνολική διάρκεια αποστολής των 3 μηνυμάτων

(α) $Z = X_1 + X_2 + Y$

Από την εκφώνηση, $X_1, X_2 \sim U[1,3]$. Συνεπώς $E[X_1] = E[X_2] = \frac{1+3}{2} = 2$

$Y \sim exp(\lambda = 1/8)$ $E[Y] = 8$.

$\therefore$ $E[Z] = E[X_1] + E[X_2] + E[Y] = 2 + 2 + 8 = \underline{\underline{12}}$.

(β) $f_{X_i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}, & 1 \le x \le 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

$P(X_1 > 2, X_2 > 2) = P(X_1 > 2)\, P(X_2 > 2) = \left[\int_2^3 \frac{1}{2} dx \right]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = \underline{\underline{0.25}}$

(ανεξαρτησία των X_1, X_2)

(γ) $P(Y > E[X_1 + X_2]) = P(Y > 2+2) = P(Y > 4) = 1 - P(Y \le 4)$

$= 1 - F_Y(4) = 1 - \left[1 - e^{-4/8}\right] = e^{-1/2} = \underline{\underline{0.6065}}$

(δ) $P(10 \le Y \le 20 \mid Y > 10) = \dfrac{P(10 \le Y \le 20, Y > 10)}{P(Y > 10)} = \dfrac{P(10 \le Y \le 20)}{P(Y > 10)}$

$= \dfrac{F_Y(20) - F_Y(10)}{1 - F_Y(10)} = \dfrac{1 - e^{-20/8} - (1 - e^{-10/8})}{1 - (1 - e^{-10/8})}$

$= \dfrac{e^{-10/8} - e^{-20/8}}{e^{-10/8}} = \underline{\underline{0.7135}}$

* Στα (γ) και (δ) χρησιμοποιήσαμε την έκφραση της ΑΣΚ της εκθετικής κατανομής: $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

ΘΕΜΑ 2ο Μας δίδεται ότι δεδομένου του γεγονότος $X=a$, οι τ.μ. Y_1 και Y_2 είναι ανεξάρτητες και ομοιόμορφα κατανεμημένες στο $[0,a]$: $Y_1/_{X=a}, Y_2/_{X=a} \sim U[0,a]$:

$$f_{Y_1/X}(y/a) = \begin{cases} \frac{1}{a} & 0 \le y \le a \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \qquad f_{Y_2/X}(y/a) = \begin{cases} \frac{1}{a} & 0 \le y \le a \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Επίσης μας δίδεται ότι: $P_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{3} & , k=1,2,3 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$

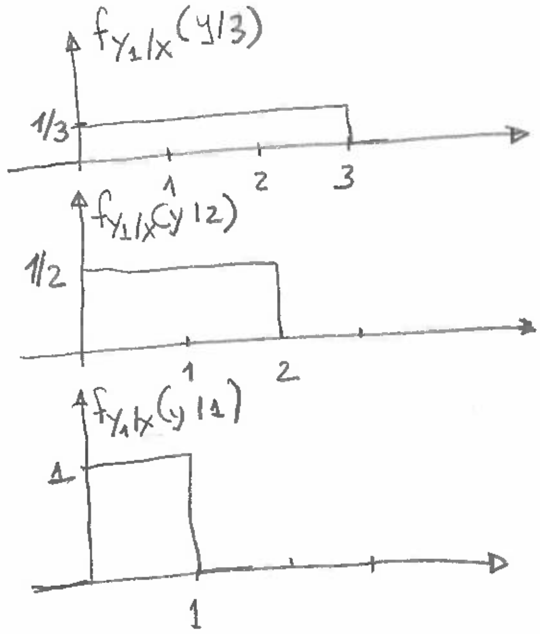
(α) ΘΟΠ: $P(Y_1 \le \frac{1}{2}) = P(X=1) \cdot P(Y_1 \le \frac{1}{2} / X=1) + P(X=2) P(Y_1 \le \frac{1}{2} \mid X=2)$

$+ P(X=3) P(Y_1 \le \frac{1}{2} \mid X=3)$

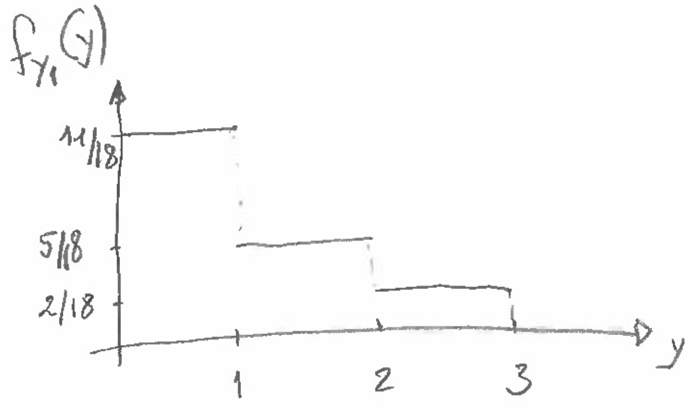
$$= \frac{1}{3} \int_0^{1/2} 1\, dy + \frac{1}{3} \int_0^{1/2} \frac{1}{2} dy + \frac{1}{3} \int_0^{1/2} \frac{1}{3} dy$$

$$= \frac{1}{3} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} = \frac{11}{36} = \underline{\underline{0.3056}}$$

(β) ΘΟΠ: $f_{Y_1}(y) = \frac{1}{3} f_{Y_1/X}(y/1) + \frac{1}{3} f_{Y_1/X}(y/2) + \frac{1}{3} f_{Y_1/X}(y/3)$



$$\therefore f_{Y_1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{3}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{11}{18} & 0 \le y \le 1 \\ \frac{1}{3}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{5}{18} & 1 < y \le 2 \\ \frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{2}{18} & 2 < y \le 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



(γ) Αφού, δεδομένης της τιμής του X, οι Y_1 και Y_2 είναι ανεξάρτητες, έχουμε:

$$P(Y_1 \le 1/2, Y_2 \le 1/2 \,/ X=1) = P(Y_1 \le 1/2 \,/ X=1) \cdot P(Y_2 \le \tfrac{1}{2} \,/ X=1)$$

$$= \int_0^{1/2} 1\,dy \cdot \int_0^{1/2} 1\,dy = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \underline{\underline{0.25}}$$

(δ) Bayes:
$$P(X=1 \,/\, Y_1 \le 1/2, Y_2 \le 1/2) = \frac{P(X=1)\,P(Y_1 \le \frac{1}{2}, Y_2 \le \frac{1}{2} \,/ X=1)}{\sum_{k=1,2,3} P(X=k)\,P(Y_1 \le \frac{1}{2}, Y_2 \le \frac{1}{2} \,/ X=k)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\left(\int_0^{1/2} 1\,dy\right)^2}{\frac{1}{3}\left(\int_0^{1/2} 1\,dy\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\int_0^{1/2} \frac{1}{2}\,dy\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\int_0^{1/2} \frac{1}{3}\,dy\right)^2}$$

$$= \frac{(1/2)^2}{(1/2)^2 + (\frac{1}{2}\,\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{3}\,\frac{1}{2})^2} = \frac{1/4}{1/4 + 1/16 + 1/36} = \frac{36}{49} = \underline{\underline{0.734}}$$

ΘΕΜΑ 3ο

(α) Καθώς οι X και Y είναι ανεξάρτητες Γκαουσιανές, και η $Z = X - Y$ θα είναι Γκαουσιανή με $E[Z] = E[X] - E[Y] = 0$ και διασπορά $var(Z) = var(X) + var(Y) = 0.04 + 0.01 = 0.05$:

$$Z \sim N(0, 0.05)$$

(β) Ομοίως, η τ.μ. $W = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} Z_i$ είναι Γκαουσιανή με:

- $E[W] = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} E[Z_i] = \underline{\underline{0}}$
- $var(W) = \sum_{i=1}^{100} \left(\frac{1}{100}\right)^2 var(Z_i) = 100\,\frac{1}{100^2} \cdot 0.05 = \underline{\underline{5 \times 10^{-4}}}$

(γ)
$$P(|W| > 0.05) = 1 - P(|W| \le 0.05) = 1 - P(-0.05 \le W \le 0.05)$$

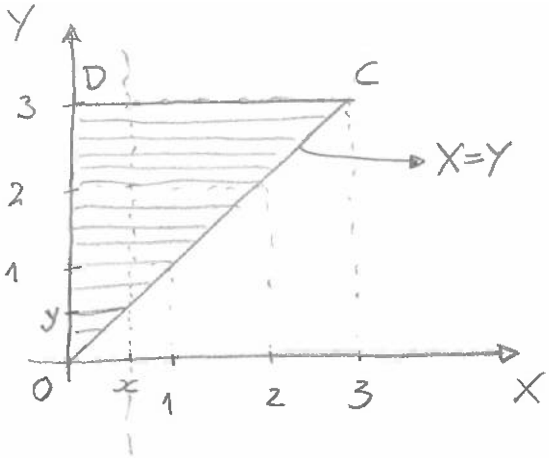
$$= 1 - P\left(\frac{-0.05}{\sqrt{5\times10^{-4}}} \le \frac{W}{\sqrt{5\times10^{-4}}} \le \frac{0.05}{\sqrt{5\times10^{-4}}}\right)$$

$$= 1 - [\Phi(\sqrt{5}) - \Phi(-\sqrt{5})] = 1 - [\Phi(\sqrt{5}) - (1 - \Phi(\sqrt{5}))]$$

$$= 2[1 - \Phi(\sqrt{5})] \,//$$

ΘΕΜΑ 4ο

(α) Οι τ.μ. X,Y έχουν από κοινού ομοιόμορφη κατανομή στο γραμμοσκιασμένο χωρίο OCD.



Θα πρέπει $\iint_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$

ή $E_{OCD}\cdot c = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\,3\cdot 3\cdot c = 1 \Rightarrow$

$$\underline{\underline{c = 2/9}}$$

$$\therefore \quad f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{9} & 0\leq x\leq y\leq 3 \ (\text{ή } (x,y)\in OCD) \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

(β) $\cdot\ f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_{y=x}^{3} \frac{2}{9}\,dy = \frac{2}{9}\,y\Big|_x^3 = \frac{2}{9}(3-x);\ 0\leq x\leq 3$

$\cdot\ f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_{x=0}^{y} \frac{2}{9}\,dx = \frac{2}{9}\,x\Big|_0^y = \frac{2}{9}\,y\ ;\ 0\leq y\leq 3$

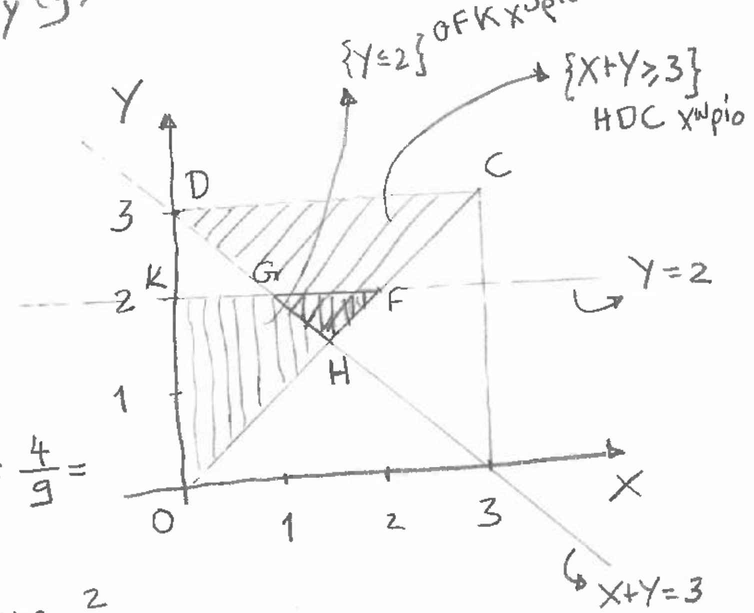
$$\therefore \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}(3-x) & ,\ 0\leq x\leq 3 \\ 0 & ,\ \text{αλλού} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{9}\,y & ,\ 0\leq y\leq 3 \\ 0 & ,\ \text{αλλού} \end{cases}$$

$f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)\cdot f_Y(y) \Rightarrow$ X,Y: <u>ΔΕΝ</u> είναι ανεξάρτητες.

(γ) $A = \{Y\leq 2\}$

$B = \{X+Y\geq 3\}$



$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$P(A) = E_{OFK}\cdot\frac{2}{9} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{2}{9} = \frac{4}{9} = 0.4444.$

$P(A\cap B) = E_{HFG}\cdot\frac{2}{9} = \frac{1}{2}\,HF\cdot HG\,\frac{2}{9}$

$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{9} = \frac{1}{18}$

$$\therefore P(B/A) = \frac{1/18}{4/9} = \frac{1}{8} = \underline{\underline{0.125}}$$

(δ) $f_{Y/X}(y/x) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \dfrac{2/9}{2/9\,(3-x)} = \dfrac{1}{3-x}$; $x \le y \le 3$

Για $x=1$ $\quad f_{Y/X}(y/x=1) = \begin{cases} \dfrac{1}{3-1} = \dfrac{1}{2} & 1 \le y \le 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

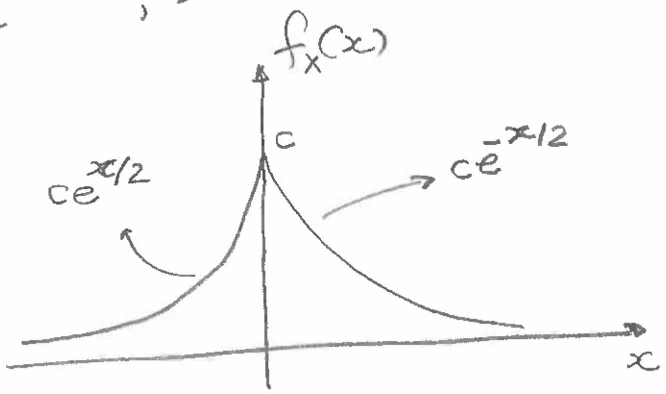
Συνεπώς η δεσμευμένη κατανομή της τ.μ. Y δεδομένου του $\{X=x\}$ είναι ομοιόμορφη στο διάστημα $[x, 3]$!

$\therefore\; E[Y/X=x] = \dfrac{x+3}{2}$

$\therefore\; \mathrm{var}(Y/X=x) = \dfrac{(3-x)^2}{12}$.

ΘΕΜΑ 5°: (α)

$$f_X(x) = c\,e^{-|x|/2} = \begin{cases} c\,e^{x/2} & , x<0 \\ c\,e^{-x/2} & , x \ge 0 \end{cases}$$



Η κατανομή αυτή είναι γνωστή ως "διπλή εκθετική" (double exponential) ή Laplace. Προφανώς είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των y.

Πρέπει $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

Έχουμε: $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} c\,e^{x/2}dx + \int_{0}^{+\infty} c\,e^{-x/2}dx = 2c\,e^{x/2}\Big|_{-\infty}^{0} - 2c\,e^{-x/2}\Big|_{0}^{+\infty}$

$= 2c - 0 - (0 - 2c) = 4c = 1 \Rightarrow \underline{\underline{c = 1/4}}$

$$\therefore\; f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{x/2} & , x<0 \\ \frac{1}{4}e^{-x/2} & , x \ge 0. \end{cases}$$

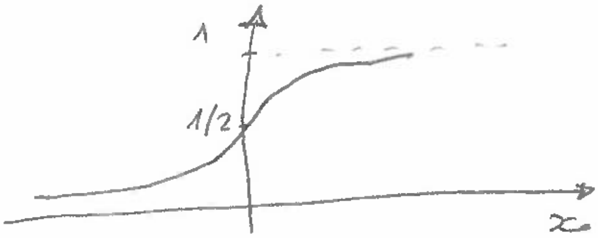
(β) $\quad F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$

Για $x \le 0$, $\quad F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{4}e^{t/2}dt = \frac{1}{2}e^{t/2}\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{2}e^{x/2}$

· Για $x>0$ $\quad F_X(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{4} e^{t/2}\,dt}_{1/2} + \int_{0}^{x} \frac{1}{4} e^{-t/2}\,dt$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-t/2}\Big|_0^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-x/2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} e^{-x/2}$$

$$\therefore \quad F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x/2}, & x \le 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-x/2}, & x \geq 0 \end{cases}$$



(γ) $P(|X| \geq 0.4) = 1 - P(|X| < 0.4) = 1 - P(-0.4 < X < 0.4)$

$$= 1 - \left[F_X(0.4) - F_X(-0.4)\right] = 1 - \left[1 - \frac{1}{2} e^{-0.4/2} - \frac{1}{2} e^{-0.4/2}\right] = e^{-0.4/2} = e^{-0.2} = \underline{0.8187}$$

$P(X=0.5)=0$ καθώς η τ.μ. X είναι συνεχής.

(δ) Προφανώς το πεδίο τιμών της $Y=X^2$ είναι το $[0,+\infty)$.

Στο μάθημα δείξαμε ότι για $y \geq 0$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y})$$

$$= F_X(\sqrt{y}) - F_Y(-\sqrt{y}) = \left(1 - \frac{1}{2} e^{-\sqrt{y}/2}\right) - \frac{1}{2} e^{-\sqrt{y}/2} = 1 - e^{-\sqrt{y}/2}$$

Συνεπώς: $\quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ 1 - e^{-\sqrt{y}/2}, & y \geq 0 \end{cases}$

(ε) $\quad f_Y(y) = \dfrac{dF_Y(y)}{dy} = \dfrac{1}{4\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}/2} \; ; \; y \geq 0$

(ζ) $\quad P(Y < 0.5) = F_Y(0.5) = 1 - e^{-\sqrt{0.5}/2} = 0.2978$

$P(Y \geq -0.5) = 1$!! (Η τ.μ. Y παίρνει μη αρνητικές τιμές)

$\left(= 1 - P(Y < -0.5) = 1 - F_Y(-0.5) = 1 - 0 = 1 \right).$