

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2025-2026
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1

Σε ένα λεωφορείο με προορισμό το Πανεπιστήμιο Κρήτης, το 40% των επιβατών είναι φοιτητές που σπουδάζουν Επιστήμη Υπολογιστών, το 30% Μαθηματικά, το 20% Βιολογία και το 10% Ιατρική. Επίσης, οι φοιτητές τις Ιατρικής αποτελούν το 50% των φοιτητών, οι Μαθηματικοί το 25% και οι Βιολόγοι το 5%.

- (α) Επιλέγουμε τυχαία έναν φοιτητή. Ποια η πιθανότητα να βρίσκεται στο λεωφορείο;
- (β) Δεδομένου ότι ο φοιτητής βρίσκεται στο λεωφορείο, ποια η πιθανότητα να σπουδάζει Επιστήμη Υπολογιστών;

Λύση

Έστω τα ενδεχόμενα:

- Λ : ο φοιτητής βρίσκεται στο λεωφορείο
- Y : ο φοιτητής σπουδάζει Επιστήμη Υπολογιστών
- M : ο φοιτητής σπουδάζει Μαθηματικά
- B : ο φοιτητής σπουδάζει Βιολογία
- I : ο φοιτητής σπουδάζει Ιατρική

Από την εκφώνηση:

$$\begin{aligned}P(Y) &= 0.2 \\P(M) &= 0.25 \\P(B) &= 0.05 \\P(I) &= 0.5 \\P(\Lambda|Y) &= 0.4 \\P(\Lambda|M) &= 0.3 \\P(\Lambda|B) &= 0.2 \\P(\Lambda|I) &= 0.1\end{aligned}$$

(α) Από ΘΟΠ έχουμε ότι $P(\Lambda) = P(\Lambda|Y)P(Y) + P(\Lambda|M)P(M) + P(\Lambda|B)P(B) + P(\Lambda|I)P(I) = 0.215$

(β) Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας: $P(Y|\Lambda) = \frac{P(\Lambda|Y)P(Y)}{P(\Lambda)} \approx 0.372$

Άσκηση 2

Ένας σκληρός δίσκος ο οποίος περιέχει δεδομένα έχει χαλάσει. Εσείς προσπαθείτε να διαβάσετε χειρωνακτικά τα bits αλλά γνωρίζετε πως κάποια πιθανώς είναι λάθος. Αν υπάρχει ένα 0, τότε η πιθανότητα να διαβάσετε σωστά είναι 0.8, ενώ αν υπάρχει 1, η πιθανότητα να το διαβάσετε σωστά είναι 0.9. Δεδομένου ότι διαβάζετε 0 για κάποιο bit, ποια η πιθανότητα ότι το έχετε διαβάσει σωστά;

Λύση

Έστω A το γεγονός ότι διαβάζουμε 0, B_0 το γεγονός ότι το bit ήταν 0, και B_1 το γεγονός ότι το bit ήταν 1. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Bayes έχουμε:

$$P(B_0|A) = \frac{P(A|B_0)P(B_0)}{P(A|B_0)P(B_0) + P(A|B_1)P(B_1)} = \frac{0.8 \times 0.5}{0.8 \times 0.5 + 0.1 \times 0.5} = 0.889$$

Άσκηση 3

Ένας παίκτης ρίχνει τρία βελάκια, το ένα μετά το άλλο. Έστω D_i το γεγονός το i -οστό βελάκι να χτυπήσει το στόχο. Δίνεται ότι:

- D_1 είναι ανεξάρτητο των D_2 και D_3 ΚΑΙ της τομής τους
- $P(D_1) = 0.8$
- $P(D_2) = 0.8$
- $P(D_3|D_2) = 0.9$
- $P(D_3|D_2^c) = 0.5$

- (α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα τρίτο βελάκι να χτυπήσει το στόχο.
- (β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα το δεύτερο βελάκι να έχει χτυπήσει το στόχο δεδομένου ότι το τρίτο βελάκι τον έχει χτυπήσει.
- (γ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα και τα τρία βελάκια να χτυπήσουν το στόχο.
- (δ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ακριβώς δύο βελάκια να χτυπήσουν το στόχο.

Λύση

(α)

$$\begin{aligned}P(D_3) &= P(D_3|D_2)P(D_2) + P(D_3|D_2^c)P(D_2^c) \\&= 0.9 \cdot 0.8 + 0.5 \cdot 0.2 \\&= 0.72 + 0.10 \\&= 0.82\end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned}P(D_2|D_3) &= \frac{P(D_2, D_3)}{P(D_3)} \\&= \frac{P(D_3|D_2)P(D_2)}{P(D_3)} \\&= \frac{0.9 \cdot 0.8}{0.82} \\&= \frac{72}{82}\end{aligned}$$

(γ)

$$\begin{aligned}P(D_1, D_2, D_3) &= P(D_3|D_1, D_2)P(D_2|D_1)P(D_1) \\&= P(D_3|D_2)P(D_2)P(D_1) \\&= 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.8 \\&= 0.576\end{aligned}$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι αλλάζοντας απλώς τη σειρά στον κανόνα της αλυσίδας, παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned}P(D_1, D_2, D_3) &= P(D_1|D_2, D_3)P(D_3|D_2)P(D_2) \\&= P(D_1)P(D_3|D_2)P(D_2) \\&= 0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.8 \\&= 0.576\end{aligned}$$

(δ)

$$\begin{aligned}P(\text{ακριβώς } 2) &= P(D_1, D_2, D_3^c \cup D_1, D_2^c, D_3 \cup D_1^c, D_2, D_3) \\&= P(D_1, D_2, D_3^c) + P(D_1, D_2^c, D_3) + P(D_1^c, D_2, D_3) \\&= P(D_3^c|D_2)P(D_2)P(D_1) + P(D_3|D_2^c)P(D_2^c)P(D_1) + P(D_3|D_2)P(D_2)P(D_1^c) \\&= 0.1 \cdot 0.8 \cdot 0.8 + 0.5 \cdot 0.2 \cdot 0.8 + 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.2 \\&= 0.064 + 0.08 + 0.144 \\&= 0.288\end{aligned}$$

Άσκηση 4

Έχουμε δύο κουτιά, το Α και το Β, στα οποία ρίχνουμε μέσα τυχαία τρεις μπάλες. Έστω ο δειγματοχώρος $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ και έστω ω οι μπάλες που μπήκαν στο πρώτο κουτί. Θεωρούμε τα 4 αποτελέσματα του ω ισοπίθανα. Θεωρούμε ακόμα τα ενδεχόμενα:

- $A = \{\text{Το πρώτο κουτί περιέχει τουλάχιστον μία μπάλα}\}$
- $B = \{\text{Το δεύτερο κουτί περιέχει τουλάχιστον δύο μπάλες}\}$

(α) Να υπολογιστούν τα $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$

(β) Είναι τα Α και Β ανεξάρτητα;

(γ) Είναι τα Α και A^c ανεξάρτητα;

(δ) Είναι τα Β και B^c ανεξάρτητα;

(ε) Είναι τα Α και $A \cup B$ ανεξάρτητα;

(στ) Είναι τα Α και $A \cap B$ ανεξάρτητα;

Λύση

Από την εκφώνηση μπορούμε να συμπεράνουμε ότι: $A = \{1, 2, 3\}$, $A^c = \{0\}$, $B = \{0, 1\}$, $B^c = \{2, 3\}$, $A \cup B = \Omega$, $A \cap B = \{1\}$

(α) Αφού τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα έχουμε:

$$\begin{aligned}P(A) &= P(\{1, 2, 3\}) = \frac{3}{4}, \\P(B) &= P(\{0, 1\}) = \frac{1}{2}, \\P(A \cup B) &= P(\Omega) = 1\end{aligned}$$

(β)

$$P(A \cap B) = P(\{1\}) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8},$$

άρα δεν είναι ανεξάρτητα.

(γ)

$$P(A \cap A^c) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A)P(A^c) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16},$$

άρα δεν είναι ανεξάρτητα.

(δ)

$$P(B \cap B^c) = P(\emptyset) = 0 \neq P(B)P(B^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

άρα δεν είναι ανεξάρτητα.

(ε) Αφού ισχύει ότι $A \cup B = \Omega$ τότε:

$$P(A \cap \Omega) = P(A) = \frac{3}{4} = P(A)P(\Omega),$$

άρα είναι ανεξάρτητα.

(στ)

$$P(A \cap (A \cap B)) = P(A \cap B) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(A \cap B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16},$$

άρα δεν είναι ανεξάρτητα.

Άσκηση 5

Μία ασφαλιστική εταιρία κατατάσσει τους ανθρώπους σε τρεις κατηγορίες ανάλογα με την επικινδυνότητα τους στην οδήγηση: Κατηγορία μικρού, μέτριου και μεγάλου ρίσκου. Τα αρχεία της εταιρίας δείχνουν ότι οι πιθανότητες πελάτες μικρού, μέτριου και μεγάλου ρίσκου να έχουν ατύχημα κατά τη διάρκεια ενός έτους είναι 0.05, 0.15 και 0.30, αντίστοιχα. Αν το 20% του πληθυσμού αποτελείται από άτομα μικρού ρίσκου, το 50% αποτελείται από άτομα μέτριου ρίσκου και το υπόλοιπο 30% αποτελείται από άτομα μεγάλου ρίσκου, ποιο ποσοστό του πληθυσμού έχει ατύχημα κατά τη διάρκεια ενός έτους; Αν κάποιος ασφαλισμένος δεν είχε κανένα ατύχημα το 2024, ποια η πιθανότητα ότι είναι άτομο:

- (α) μικρού ρίσκου;
- (β) μέτριου ρίσκου;

Λύση

Έστω G το γεγονός κάποιος να είναι καλός οδηγός, M να είναι μέτριος και B κακός. Αν A το γεγονός κάποιος να είχε ατύχημα, τότε

$$P(A) = P(A|G)P(G) + P(A|M)P(M) + P(A|B)P(B) = (0.05) \cdot (0.2) + (0.15)(0.5) + (0.3)(0.3) = 0.175$$

(α)

$$P(G|A^c) = \frac{P(A^c|G)P(G)}{P(A^c)} = \frac{0.95 \cdot 0.2}{0.825} = 0.23.$$

(β)

$$P(M|A^c) = \frac{P(A^c|M)P(M)}{P(A^c)} = \frac{0.85 \cdot 0.5}{0.825} = 0.51.$$

Άσκηση 6

Το 60% των κατοίκων της πόλης Α έχει μπλε αυτοκίνητα, ενώ το υπόλοιπο 40% έχει κόκκινα αυτοκίνητα. Κάποια στιγμή στην πόλη Α έγινε ένα τροχαίο και ο μόνος αυτόπτης μάρτυρας ισχυρίζεται ότι το αυτοκίνητο που ήταν υπεύθυνο για το δυστύχημα ήταν χρώματος κόκκινου. Παρόλα αυτά, ο μάρτυρας έχει προβλήματα όρασης και μπορεί να αναγνωρίσει σωστά το χρώμα του αυτοκινήτου μόνο το 75% των φορές. Ποιο είναι το χρώμα που κατά πάσα πιθανότητα είχε το αυτοκίνητο;

Λύση

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα :

- K = Το αυτοκίνητο είναι κόκκινο.
- B = Το αυτοκίνητο είναι μπλε.

Οι πιθανότητες που παίρνουμε για αυτά τα απλά ενδεχόμενα είναι :

- $P(K) = 0.4$, αφού το 40% των κατοίκων έχει κόκκινα αυτοκίνητα.
- $P(B) = 0.6$, αφού το 60% των κατοίκων έχει μπλε αυτοκίνητα.

Αφού ο μάρτυρας μπορεί να διακρίνει σωστά το αυτοκίνητο το 75% των φορές μπορούμε να ορίσουμε τα παρακάτω ενδεχόμενα :

- M_B = Ο μάρτυρας είδε μπλε αυτοκίνητο.
- M_R = Ο μάρτυρας είδε κόκκινο αυτοκίνητο.

Και οι αντίστοιχες πιθανότητες είναι :

$$P(M_R|K) = 0.75$$

$$P(M_R|B) = 0.25$$

$$P(M_B|K) = 0.25$$

$$P(M_B|B) = 0.75$$

Εφόσον ο μάρτυρας ισχυρίζεται ότι είδε κόκκινο αυτοκίνητο, η πιθανότητα το αυτοκίνητο να είναι όντως κόκκινο δίνεται από τον νόμο του Bayes και είναι ίση με :

$$\begin{aligned} P(K|M_R) &= \frac{P(M_R|K)P(K)}{P(M_R)} \\ &= \frac{P(M_R|K)P(K)}{P(M_R|K)P(K) + P(M_R|B)P(B)} \\ &= \frac{0.75 \cdot 0.4}{(0.75 \cdot 0.4) + (0.25 \cdot 0.6)} \\ &\approx 0.7 \end{aligned}$$

Η πιθανότητα το αυτοκίνητο να είναι μπλε ενώ ο μάρτυρας είδε κόκκινο είναι ίση με :

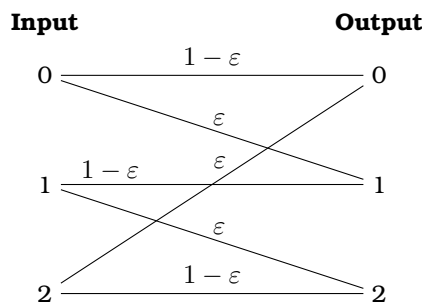
$$P(B|M_R) = 1 - P(K|M_R) = 1 - 0.7 = 0.3$$

Άρα το αυτοκίνητο κατά πάσα πιθανότητα ήταν κόκκινο.

Άσκηση 7

Το διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης για ένα τριαδικό κανάλι φαίνεται στο Σχήμα 1. Υποθέστε ότι τα σύμβολα 0, 1 και 2 στέλνονται με πιθανότητες $1/2$, $1/4$ και $1/4$ αντίστοιχα.

- Βρείτε τις πιθανότητες λήψης συμβόλων.
- Δεδομένου ότι λαμβάνεται 1, βρείτε τις πιθανότητες να εστάλη 0, 1 ή 2. Να απαντήσετε συναρτήσει του όρου ε (όπως φαίνεται και από το Σχήμα 1, το ε είναι η πιθανότητα η έξοδος του καναλιού να έχει διαφορετικό σύμβολο από αυτό της εισόδου. Αντίστοιχα, το $1 - \varepsilon$ είναι η πιθανότητα η έξοδος να έχει το ίδιο σύμβολο με την είσοδο).



Σχήμα 1: Διάγραμμα Πιθανοτήτων Μεταβάσεων

Λύση

(α) Έστω A_i το γεγονός ότι εστάλη i και B_i το γεγονός ότι ελήφθη i . Χρησιμοποιώντας τον νόμο της ολικής πιθανότητας και της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε:

$$\begin{aligned} P(B_0) &= P(B_0|A_0)P(A_0) + P(B_0|A_2)P(A_2) \\ &= \frac{1}{2}(1 - \varepsilon) + \frac{1}{4}\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\varepsilon \end{aligned}$$

$$P(B_1) = \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{4}(1 - \varepsilon) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\varepsilon$$

$$P(B_2) = \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{1}{4}(1 - \varepsilon) = \frac{1}{4}$$

Όπως ήταν αναμενόμενο το άθροισμα των πιθανοτήτων των γεγονότων B_i είναι 1.

(β)

$$\begin{aligned} P(A_0|B_1) &= \frac{P(A_0|B_1)}{P(B_1)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{\frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{4}(1 - \varepsilon)} \\ &= \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_1|B_1) &= \frac{\frac{1}{4}(1 - \varepsilon)}{\frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{4}(1 - \varepsilon)} \\ &= \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \end{aligned}$$

$$P(A_2|B_1) = 0$$

Μπορείτε να παρατηρήσετε ότι το άθροισμα των δεσμευμένων πιθανοτήτων είναι 1.