ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2025-2026
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Νέας Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1

Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές X και Y με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(2x+y), & 2 < x < 6,\ 0 < y < 5, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α΄) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c.

(β΄) Να βρεθούν οι περιθωριακές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. X και Y.

(γ΄) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(3 < X < 4,\ Y > 2)$.

(δ΄) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X > 3)$.

(ε΄) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X + Y > 4)$.

(ϛ΄) Είναι οι X και Y ανεξάρτητες τ.μ.; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση
(α) Έχουμε ότι:

$$\int_2^6 \int_0^5 c(2x+y)\,dx\,dy = 1$$

$$\int_2^6 c\left[2xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^5 dx = \int_2^6 c\left(10x + \frac{25}{2}\right) dx = 210c = 1$$

$$c = \frac{1}{210}$$

(β) Οι περιθωριακές συναρτήσεις πυκνότητας των τ.μ. X και Y:

$$f_X(x) = \int_0^5 f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^5 \frac{2x+y}{210}\,dy$$

$$= \frac{1}{210}\left[2xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^5 = \frac{1}{210}\left(10x + \frac{25}{2}\right)$$

και

$$f_Y(y) = \int_2^6 f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_2^6 \frac{2x+y}{210}\,dx$$

$$= \frac{1}{210}\left[x^2 + yx\right]_2^6 = \frac{1}{210}\,(32 + 4y)$$

(γ) Η ζητούμενη πιθανότητα:

$$P(3 < X < 4,\ Y > 2) = \frac{1}{210}\int_3^4 \int_2^5 (2x+y)\,dx\,dy = \frac{3}{20}$$

(δ)

$$P(X > 3) = \frac{1}{210} \int_3^6 \int_0^5 (2x + y)\, dx\, dy = \frac{23}{28}$$

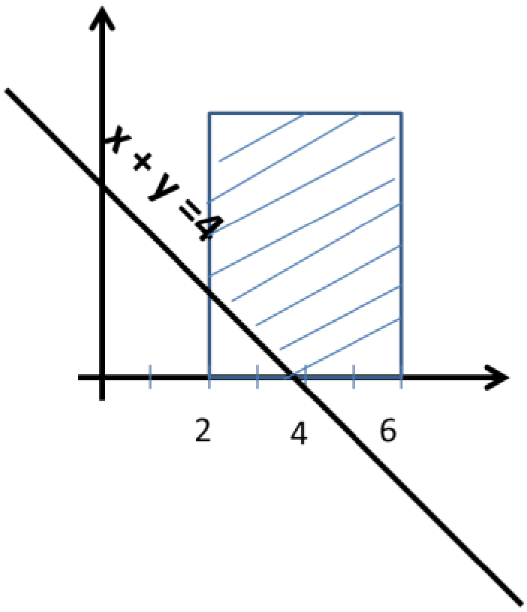
(ε) Από το Σχήμα 1:

$$P(X + Y > 4) = 1 - P(X + Y \leq 4)$$

$$= 1 - \frac{1}{210} \int_2^4 \int_0^{4-x} (2x + y)\, dx\, dy = 1 - \frac{2}{35} = \frac{33}{35}$$

(στ) Οι τ.μ. X και Y δεν είναι ανεξάρτητες, διότι:

$$f(x, y) \neq f_1(x)\, f_2(y)$$



Σχήμα 1: Περιοχή για το ερώτημα (ε).

Άσκηση 2

Οι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 12xy(1-x), & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α') Να βρεθούν οι περιθωριακές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. X και Y.

(β') Να εξετάσετε αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες τ.μ.

(γ') Να βρεθούν:

(ι) Η μέση τιμή των τ.μ. X και Y, δηλαδή $E[X]$ και $E[Y]$.

(ιι) Η διασπορά των τ.μ. X και Y, δηλαδή $var(X)$ και $var(Y)$.

(α) Η περιθωριακή σ.π.π. της $f_{X,Y}$ για την τ.μ. X γίνεται:

$$f_X(x) = \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^1 12xy(1-x)\,dy = 12x(1-x)\int_0^1 y\,dy$$
$$= 12x(1-x)\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 6x(1-x).$$

Η περιθωριακή σ.π.π. της $f_{X,Y}$ για την τ.μ. Y θα είναι:

$$f_Y(y) = \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^1 12xy(1-x)\,dx = 12y\int_0^1 x(1-x)\,dx$$
$$= 12y\int_0^1 (x-x^2)\,dx = 12y\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 12y\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = 12y\cdot\frac{1}{6} = 2y.$$

(β) Για να είναι οι τ.μ. X, Y ανεξάρτητες θα πρέπει να ισχύει:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y), \quad \forall x,y \in (0,1).$$

Έχουμε ότι:

$$f_X(x)f_Y(y) = 6x(1-x)\cdot 2y = 12xy(1-x) = f_{X,Y}(x,y), \quad \forall x,y \in (0,1).$$

Επομένως, οι X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ.

(γ) (ι) Η μέση τιμή της τ.μ. X γίνεται:

$$E[X] = \int_0^1 x\,f_X(x)\,dx = \int_0^1 x\cdot 6x(1-x)\,dx = 6\int_0^1 x^2(1-x)\,dx$$
$$= 6\int_0^1 (x^2-x^3)\,dx = 6\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 6\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

Για τη μέση τιμή της τ.μ. Y έχουμε:

$$E[Y] = \int_0^1 y\,f_Y(y)\,dy = \int_0^1 y\cdot 2y\,dy = \int_0^1 2y^2\,dy = \frac{2}{3}\left[y^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

(γ) (ιι) Η διασπορά της τ.μ. X γίνεται:

$$var[X] = E[X^2] - (E[X])^2.$$

Υπολογίζουμε τη ροπή δεύτερης τάξης $E[X^2]$ ως εξής:

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2\,f_X(x)\,dx = \int_0^1 x^2\cdot 6x(1-x)\,dx = 6\int_0^1 x^3(1-x)\,dx$$
$$= 6\int_0^1 (x^3-x^4)\,dx = 6\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 6\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{10}.$$

Επομένως, έχουμε:

$$var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{3}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}.$$

Αντίστοιχα, η διασπορά της τ.μ. Y γίνεται:

$$var[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2.$$

$$E[Y^2] = \int_0^1 y^2\,f_Y(y)\,dy = \int_0^1 y^2\cdot 2y\,dy = \int_0^1 2y^3\,dy = \left[\frac{2y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Άρα:

$$var[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

$$\boxed{E[X] = \frac{1}{2}, \quad E[Y] = \frac{2}{3}, \quad var(X) = \frac{1}{20}, \quad var(Y) = \frac{1}{18}.}$$

Άσκηση 3

Οι τ.μ. X και Y είναι από κοινού Γκαουσιανές με μέση τιμή μηδέν και διασπορά μονάδα. Επίσης, ισχύει ότι $E[XY] = 0.5$. Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. $W = X + Y$ και $Z = |W|$.

Λύση

Αφού γνωρίζουμε οι X και Y είναι από κοινού Γκαουσιανές, τότε και η $W = X + Y$ θα είναι και αυτή Γκαουσιανή, με:

$$E[W] = E[X + Y] = E[X] + E[Y] = 0$$

και

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(W) &= E[W^2] - (E[W])^2 \\
&= E[(X+Y)^2] - 0 \\
&= E[X^2 + Y^2 + 2XY] \\
&= E[X^2] + E[Y^2] + E[2XY] \\
&= 1 + 2 \cdot 0.5 + 1 = 3.
\end{aligned}$$

Άρα:

$$f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} e^{-w^2/6}.$$

Δεδομένου ότι $Z = |W|$, γνωρίζουμε ότι η Z παίρνει μη αρνητικές τιμές. Άρα για $z > 0$:

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z \le z) = P(|W| \le z) = P(-z \le W \le z) \\
&= F_W(z) - F_W(-z) = F_W(z) - (1 - F_W(z)) \\
&= 2F_W(z) - 1.
\end{aligned}$$

Συνεπώς:

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = 2 f_W(z), \quad z > 0,$$

και τελικά:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{6\pi}} e^{-z^2/6}, & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

Άσκηση 4

Θεωρούμε τη συνεχή ομοιόμορφη τ.μ. X για την οποία γνωρίζουμε ότι $E[X] = \frac{4}{8} = 0.5$ και $var(X) = \frac{25}{12}$. Η τ.μ. X είναι είσοδος σε ένα σύστημα με μετασχηματισμό $Y = X^2$.

(α΄) Να υπολογίσετε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) $f_X(x)$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

(β΄) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση του μετασχηματισμού $Y = X^2$ και να δώσετε το πεδίο τιμών της τ.μ. Y.

(γ΄) Να υπολογίσετε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F_Y(y)$ και τη σ.π.π. $f_Y(y)$.

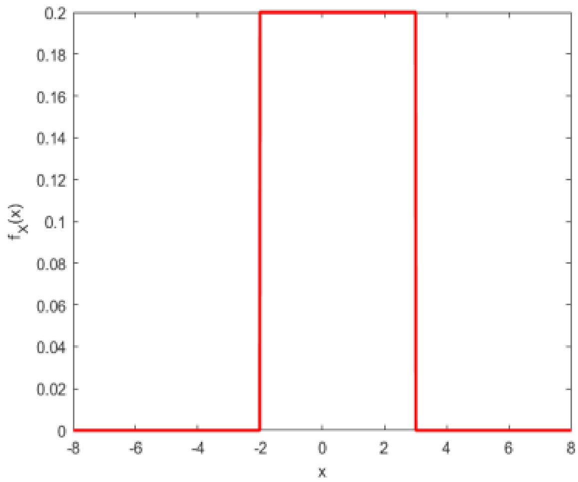
Λύση:
(α) Καθώς $X \sim U[a,b]$, ισχύουν οι τύποι:

$$E[X] = \frac{a+b}{2} = 0.5 \implies a+b = 1$$

$$var(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{25}{12} \implies (b-a)^2 = 25 \implies b-a = 5$$

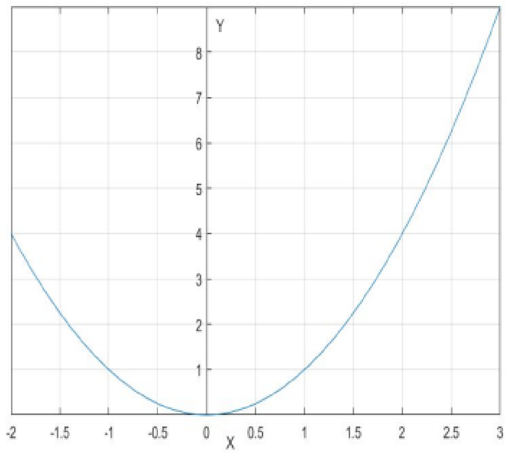
Λύνοντας το σύστημα, βρίσκουμε $a=-2$ και $b=3$. Άρα η σ.π.π. της X είναι:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/5, & -2 \leq x < 3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



Σχήμα 2: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$.

(β) Η τ.μ. $Y = X^2$ παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,9]$, καθώς το X κυμαίνεται από -2 έως 3.



Σχήμα 3: Γραφική παράσταση μετασχηματισμού $Y = X^2$.

(γ) Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F_Y(y)$ υπολογίζεται ως εξής:
Για $y < 0$, $F_Y(y) = 0$.
Για $y \geq 0$:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$$

- Αν $0 \leq y \leq 4$: $F_Y(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)dx = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} 0.2dx = 0.4\sqrt{y}$
- Αν $4 < y \leq 9$: $F_Y(y) = \int_{-2}^{\sqrt{y}} f_X(x)dx = \int_{-2}^{\sqrt{y}} 0.2dx = 0.2(\sqrt{y}+2) = 0.2\sqrt{y} + 0.4$

- Αν $y > 9$: $F_Y(y) = 1$

Άρα, έχουμε:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ 0.4\sqrt{y}, & 0 < y \leq 4 \\ 0.2\sqrt{y} + 0.4, & 4 < y \leq 9 \\ 1, & y > 9 \end{cases}$$

Η σ.π.π. $f_Y(y)$ προκύπτει από την παραγώγιση της $F_Y(y)$:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{0.2}{\sqrt{y}}, & 0 < y \leq 4 \\ \frac{0.1}{\sqrt{y}}, & 4 < y \leq 9 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Άσκηση 5

Οι συνεχείς τ.μ. X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.):

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{5}{3}, & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1, 0 \leq x+y < 1 \\ c, & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1, 1 \leq x+y < 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(α') Δώστε τη γραφική παράσταση της από κοινού σ.π.π. και υπολογίστε τη σταθερά c.

(β') Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π.π. της τ.μ. X.

(γ') Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X + Y < 4/3)$.

(δ') Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X^2 + Y^2 \geq 1)$.

Λύση:
(α) Οι τ.μ. X, Y παίρνουν τιμές στο γραμμοσκιασμένο τετράγωνο του σχήματος (Σχήμα 4). Από τη σχέση κανονικοποίησης πρέπει:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = 1$$

$$\implies \frac{5}{3} E_{OA\Gamma} + c E_{AB\Gamma} = 1$$

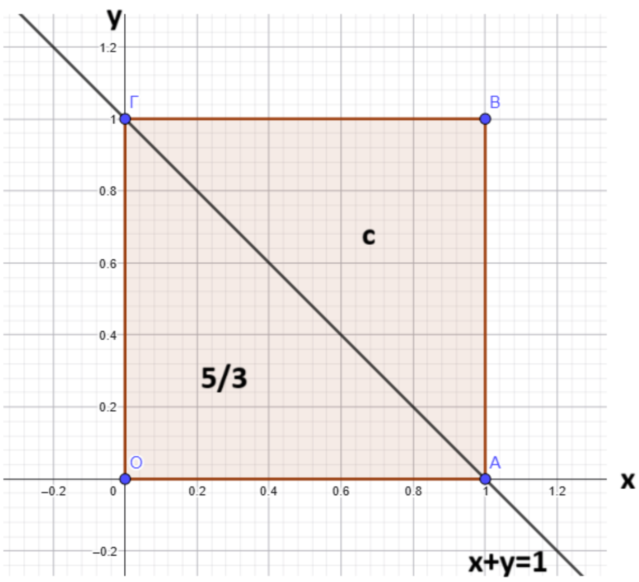
Αντικαθιστώντας τα εμβαδά:

$$\implies \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2} + c \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\implies \frac{5}{6} + \frac{c}{2} = 1 \implies \frac{c}{2} = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\implies c = \frac{1}{3}$$

Άρα $c = 1/3 \approx 0.333$



Σχήμα 4: Γραφική παράσταση της από κοινού σ.π.π.

(β) Για $x \in [0,1]$ η $f_X(x)$ υπολογίζεται ολοκληρώνοντας ως προς y από 0 έως 1. Το ολοκλήρωμα χωρίζεται στο τμήμα $[0,1-x)$ όπου $f = 5/3$ και στο $[1-x,1]$ όπου $f = 1/3$.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy = \int_0^{1-x} \frac{5}{3}\, dy + \int_{1-x}^{1} \frac{1}{3}\, dy \implies$$

$$f_X(x) = \frac{5}{3}[y]_0^{1-x} + \frac{1}{3}[y]_{1-x}^{1} \implies$$

$$f_X(x) = \frac{5}{3}(1-x) + \frac{1}{3}(1-(1-x)) \implies$$

$$f_X(x) = \frac{5}{3} - \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}x = \frac{5}{3} - \frac{4}{3}x$$

Άρα:

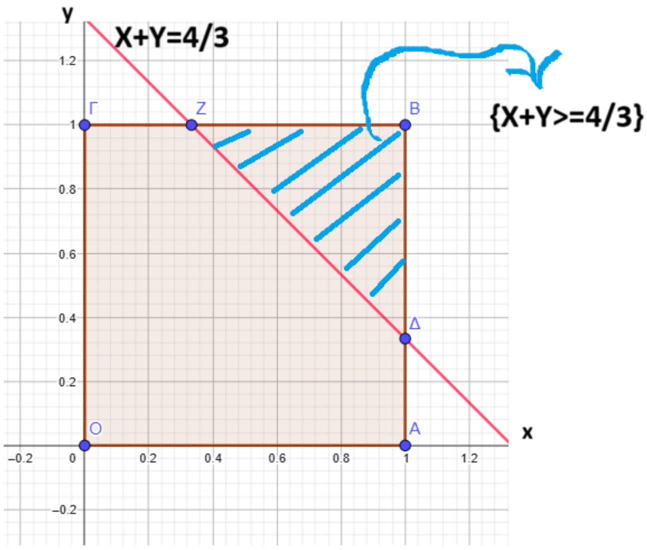
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{5}{3} - \frac{4}{3}x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(γ) Έχω:

$$P(X+Y < \frac{4}{3}) = 1 - P(X+Y \ge \frac{4}{3}) =$$

$$1 - \frac{1}{3}E_{\Delta BZ} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \implies$$

$$P(X+Y < \frac{4}{3}) = 1 - \frac{2}{27} = 0.9259$$

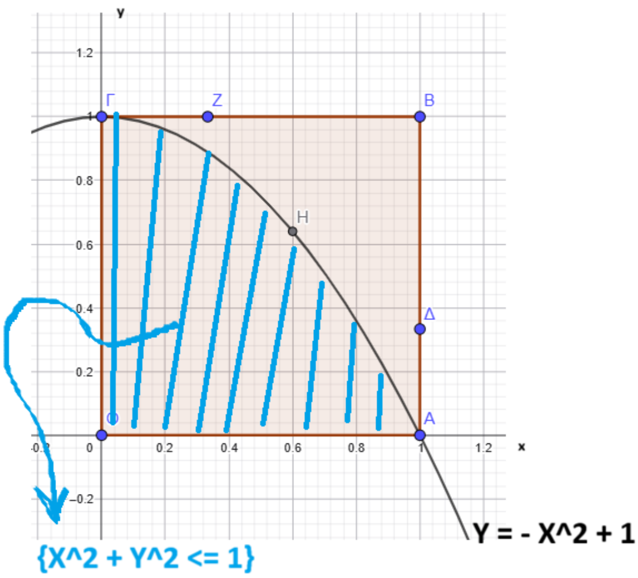


Σχήμα 5: Βοηθητικό Σχήμα για υπολογισμό πιθανότητας

(δ) Έχω:

$$P(X^2+Y^2 \leq 1) = \frac{5}{3}E_{OA\Gamma} + \frac{1}{3}E_{AH\Gamma} =$$

$$= \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot(\frac{\pi\cdot 1^2}{4} - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1) = 0.9285$$



Σχήμα 6: Βοηθητικό Σχήμα για υπολογισμό πιθανότητας

Άσκηση 6

Έστω δύο Γκαουσιανές τ.μ. X και Y με τις εξής παραμέτρους: $E[X] = 1$, $E[Y] = 3$, $\mathrm{var}(X) = 4$, $\mathrm{var}(Y) = 1$, $\rho_{X,Y} = 0.2$.

(α΄) Να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ. $Z = 2X + 3Y - 1$.

(β΄) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(Z^2 - 2Z \leq 0)$ εκφράζοντας την απάντησή σας βάσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής.

(γ΄) Έστω $W = X + \alpha Y$. Να υπολογιστεί η τιμή της σταθεράς α ώστε οι τ.μ. W και X να είναι ασυσχέτιστες.

Λύση:
(α) Έχουμε τις παραμέτρους: $E[X] = 1$, $E[Y] = 3$, $\text{var}(X) = 4$, $\text{var}(Y) = 1$, $\rho_{X,Y} = 0.2$. Η μέση τιμή της $Z = 2X + 3Y - 1$ είναι:

$$E[Z] = E[2X + 3Y - 1] = 2E[X] + 3E[Y] - 1 = 2(1) + 3(3) - 1 = 2 + 9 - 1 = 10$$

Η διασπορά της Z είναι:

$$\text{var}(Z) = \text{var}(2X + 3Y - 1) = \text{var}(2X + 3Y)$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο $\text{var}(aX + bY) = a^2\text{var}(X) + b^2\text{var}(Y) + 2ab\text{cov}(X, Y)$, έχουμε:

$$\text{var}(Z) = \text{var}(2X) + \text{var}(3Y) + 2\text{cov}(2X, 3Y)$$

$$\text{var}(Z) = 4\text{var}(X) + 9\text{var}(Y) + 12\text{cov}(X, Y)$$

Γνωρίζουμε ότι $\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)}}$, άρα $\text{cov}(X, Y) = \rho_{X,Y}\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)}$.

$$\text{cov}(X, Y) = 0.2 \cdot \sqrt{4 \cdot 1} = 0.2 \cdot 2 = 0.4$$

Αντικαθιστούμε στην έκφραση για τη διασπορά:

$$\text{var}(Z) = 4(4) + 9(1) + 12(0.4) = 16 + 9 + 4.8 = 29.8$$

Επομένως, $E[Z] = 10$ και $\text{var}(Z) = 29.8$.

(β) Η τ.μ. Z, ως γραμμικός συνδυασμός Γκαουσιανών τ.μ., είναι επίσης Γκαουσιανή: $Z \sim N(10, 29.8)$. Ζητούμε την πιθανότητα $P(Z^2 - 2Z \leq 0)$.

$$P(Z^2 - 2Z \leq 0) = P(Z(Z - 2) \leq 0)$$

Αφού $Z(Z - 2) \leq 0$ όταν $0 \leq Z \leq 2$, έχουμε:

$$P(Z^2 - 2Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq 2)$$

Για να υπολογίσουμε αυτήν την πιθανότητα, τυποποιούμε την Z:

$$P(0 \leq Z \leq 2) = P\left(\frac{0 - E[Z]}{\sqrt{\text{var}(Z)}} \leq \frac{Z - E[Z]}{\sqrt{\text{var}(Z)}} \leq \frac{2 - E[Z]}{\sqrt{\text{var}(Z)}}\right)$$

$$P(0 \leq Z \leq 2) = P\left(\frac{0 - 10}{\sqrt{29.8}} \leq \frac{Z - 10}{\sqrt{29.8}} \leq \frac{2 - 10}{\sqrt{29.8}}\right)$$

Εκφράζοντας την απάντηση βάσει της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής $\Phi(\cdot)$:

$$P(0 \leq Z \leq 2) = \Phi\left(\frac{2 - 10}{\sqrt{29.8}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 10}{\sqrt{29.8}}\right)$$

$$P(0 \leq Z \leq 2) \approx \Phi(-1.4635) - \Phi(-1.8319)$$

$$P(0 \leq Z \leq 2) \approx \Phi(1.8319) - \Phi(1.4635)$$

(γ) Οι τ.μ. $W = X + \alpha Y$ και X είναι ασυσχέτιστες αν $\text{cov}(W, X) = 0$. Αυτό είναι ισοδύναμο με $\text{cov}(W, X) = E[WX] - E[W]E[X] = 0$, δηλαδή $E[WX] = E[W]E[X]$.
Υπολογίζουμε πρώτα $E[W]$ και $E[X]$:

$$E[W] = E[X + \alpha Y] = E[X] + \alpha E[Y] = 1 + \alpha(3) = 1 + 3\alpha$$

$$E[X] = 1$$

Άρα, $E[W]E[X] = (1 + 3\alpha) \cdot 1 = 1 + 3\alpha$.

Υπολογίζουμε τώρα $E[WX]$:

$$E[WX] = E[(X+\alpha Y)X] = E[X^2 + \alpha XY] = E[X^2] + \alpha E[XY]$$

Γνωρίζουμε ότι $\mathrm{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$, άρα $E[X^2] = \mathrm{var}(X) + (E[X])^2 = 4 + 1^2 = 5$. Επίσης, $\mathrm{cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$, άρα $E[XY] = \mathrm{cov}(X,Y) + E[X]E[Y]$.

$$E[XY] = 0.4 + (1)(3) = 3.4$$

Αντικαθιστούμε στην έκφραση για το $E[WX]$:

$$E[WX] = 5 + \alpha(3.4) = 5 + 3.4\alpha$$

Για να είναι ασυσχέτιστες, πρέπει $E[WX] = E[W]E[X]$:

$$5 + 3.4\alpha = 1 + 3\alpha$$
$$3.4\alpha - 3\alpha = 1 - 5$$
$$0.4\alpha = -4$$
$$\alpha = \frac{-4}{0.4} = -10$$

Η τιμή της σταθεράς είναι $\alpha = -10$.

Άσκηση 7

Θεωρείστε έναν κύλινδρο με ύψος H και ακτίνα R, όπου H και R είναι δύο ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες τ.μ. που ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0,1]$: $H \sim U[0,1]$ και $R \sim U[0,1]$. Ο όγκος του κυλίνδρου είναι προφανώς $V = \pi H R^2$.

(α΄) Να υπολογιστεί ο μέσος όγκος, $E[V]$, του κυλίνδρου.

(β΄) Ποια είναι η πιθανότητα ο όγκος του κυλίνδρου να είναι μεγαλύτερος από $\frac{\pi}{27}$ δεδομένου ότι το ύψος του είναι ίσο με $\frac{1}{3}$;

(γ΄) Να υπολογιστεί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_V(v)$, του όγκου V. Ποια η πιθανότητα $P(V \leq \pi/2)$;

(δ΄) Να υπολογιστεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_V(v)$.

Λύση:
(α) Υπολογισμός του μέσου όγκου $E[V]$, όπου $V = \pi H R^2$. Καθώς οι H και R είναι ανεξάρτητες τ.μ., έχουμε:

$$E[V] = E[\pi H R^2] = \pi E[H] E[R^2]$$

Επειδή $H \sim U[0,1]$ και $R \sim U[0,1]$:

$$E[H] = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

Για το $E[R^2]$, χρησιμοποιούμε τον τύπο $\mathrm{var}(R) = E[R^2] - (E[R])^2$. Για ομοιόμορφη κατανομή $U[a,b]$, $\mathrm{var}(R) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

$$\mathrm{var}(R) = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}$$

$$E[R^2] = \mathrm{var}(R) + (E[R])^2 = \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1+3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Επομένως, ο μέσος όγκος είναι:

$$E[V] = \pi \cdot E[H] \cdot E[R^2] = \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi}{6}$$

(β) Υπολογισμός της πιθανότητας $P\left(V > \frac{\pi}{27} \middle| H = \frac{1}{3}\right)$.

$$P\left(V > \frac{\pi}{27} \middle| H = \frac{1}{3}\right) = P\left(\pi H R^2 > \frac{\pi}{27} \middle| H = \frac{1}{3}\right)$$

Αντικαθιστούμε $H = 1/3$:

$$= P\left(\pi\left(\frac{1}{3}\right)R^2 > \frac{\pi}{27}\right) = P\left(\frac{\pi}{3}R^2 > \frac{\pi}{27}\right)$$

Διαιρούμε με $\pi/3$:

$$= P\left(R^2 > \frac{1}{9}\right) = P\left(R > \frac{1}{3}\right)$$

Αφού $R \sim U[0,1]$, η πιθανότητα είναι:

$$P\left(R > \frac{1}{3}\right) = 1 - P\left(R \leq \frac{1}{3}\right) = 1 - F_R\left(\frac{1}{3}\right)$$

Για την $U[0,1]$, $F_R(r) = r$ για $0 \leq r \leq 1$:

$$P\left(R > \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

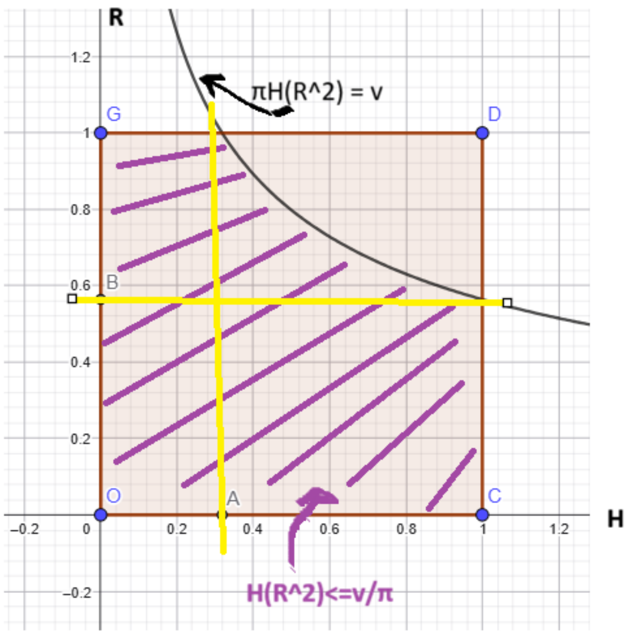
(γ) Υπολογισμός της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής $F_V(v) = P(V \leq v)$, όπου $V = \pi H R^2$. Οι H και R είναι ανεξάρτητες και ομοιόμορφες στο $[0,1]$. Ο όγκος V παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,\pi]$. Για $0 < v \leq \pi$:

$$F_V(v) = P(V \leq v) = P(\pi H R^2 \leq v) = P\left(HR^2 \leq \frac{v}{\pi}\right)$$

Ο υπολογισμός γίνεται με ολοκλήρωση της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας $f_{H,R}(h,r) = 1$ για $0 < h < 1, 0 < r < 1$:

$$F_V(v) = \iint_D f_{H,R}(h,r)\,dh\,dr = \iint_D 1\,dh\,dr$$

όπου για $D : hr^2 \leq \frac{v}{\pi}$.



Σχήμα 7: Βοηθητικό Σχήμα για υπολογισμό αθροιστικής συνάρτησης κατανομής

$$F_V(v) = \int_0^{v/\pi}\int_0^1 dh\,dr + \int_{v/\pi}^1 \int_0^{\sqrt{\frac{v}{\pi h}}} dh\,dr$$

$$F_V(v) = \int_0^{v/\pi} 1\,dr + \int_{v/\pi}^1 \sqrt{\frac{v}{\pi h}}\,dr$$

$$F_V(v) = [r]_0^{v/\pi} + \sqrt{\frac{v}{\pi}}\int_{v/\pi}^1 h^{-\frac{1}{2}}\,dh$$

$$F_V(v) = [r]_0^{v/\pi} + \sqrt{\frac{v}{\pi}}\left[2\sqrt{h}\right]_{v/\pi}^{1}$$

$$F_V(v) = \frac{v}{\pi} + \sqrt{\frac{v}{\pi}} \cdot 2\left(1 - \sqrt{v/\pi}\right)$$

$$F_V(v) = \frac{v}{\pi} + 2\sqrt{\frac{v}{\pi}} - 2\frac{v}{\pi}$$

$$F_V(v) = 2\sqrt{\frac{v}{\pi}} - \frac{v}{\pi}$$

Συνοψίζοντας την αθροιστική συνάρτηση κατανομής:

$$F_V(v) = \begin{cases} 0, & v \leq 0 \\ 2\sqrt{\frac{v}{\pi}} - \frac{v}{\pi}, & 0 < v \leq \pi \\ 1, & v > \pi \end{cases}$$

Υπολογισμός της πιθανότητας $P(V \leq \pi/2)$:

$$P(V \leq \pi/2) = F_V\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Επειδή $0 < \pi/2 \leq \pi$:

$$F_V\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{\pi/2}{\pi}} - \frac{\pi/2}{\pi} = 2\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}$$

$$F_V\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} - \frac{1}{2} \approx 1.4142 - 0.5 = 0.9142$$

(δ) Υπολογισμός της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $f_V(v)$. Η $f_V(v)$ είναι η παράγωγος της $F_V(v)$: $f_V(v) = \frac{dF_V(v)}{dv}$. Για $0 < v \leq \pi$:

$$f_V(v) = \frac{d}{dv}\left(2\sqrt{\frac{v}{\pi}} - \frac{v}{\pi}\right) = \frac{d}{dv}\left(2\pi^{-1/2}v^{1/2} - \frac{1}{\pi}v\right)$$

$$f_V(v) = 2\pi^{-1/2}\left(\frac{1}{2}v^{-1/2}\right) - \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{\pi v}} - \frac{1}{\pi}$$

Συνοψίζοντας την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi v}} - \frac{1}{\pi}, & 0 < v \leq \pi \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$