

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2025-2026
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Έκτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 25/11/2025

Ημερομηνία Παράδοσης: 09/12/2025

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, **εδώ**. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΠΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τη σχέση:

$$f_X(x) = \begin{cases} c(1-x)^3 & , \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- (α) Βρείτε το c έτσι ώστε η $f_X(x)$ να ικανοποιεί τις συνθήκες μίας συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας.
- (β) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X .
- (γ) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(x)$, της X .
- (δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X = 0.6)$.
- (ε) Υπολογίστε την πιθανότητα $P\left(\frac{1}{3} < X \leq \frac{4}{3}\right)$.

Λύση

- (α) Ισχύει $f_X(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, διότι στο διάστημα αυτό έχουμε $1 - x \geq 0 \Rightarrow (1 - x)^3 \geq 0$ και για $c > 0$ η συνάρτηση είναι μη αρνητική.

Επιπλέον πρέπει να ικανοποιείται η ιδιότητα της κανονικοποίησης:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = \int_0^1 c(1-x)^3 dx = 1.$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 (1-x)^3 dx = \left[\frac{-(1-x)^4}{4} \right]_0^1 = -\frac{(1-1)^4}{4} + \frac{(1-0)^4}{4} = \frac{1}{4}.$$

Άρα

$$c \cdot \frac{1}{4} = 1 \implies c = 4.$$

(β)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 4x(1-x)^3 dx \\ &= 4 \int_0^1 x(1-3x+3x^2-x^3) dx = 4 \int_0^1 (x-3x^2+3x^3-x^4) dx \\ &= 4 \left[\frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{3x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 \\ &= 4 \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{5} \right) = 2 - 4 + 3 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τη δεύτερη ροπή:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^1 4x^2(1-x)^3 dx \\ &= 4 \int_0^1 x^2(1-3x+3x^2-x^3) dx = 4 \int_0^1 (x^2-3x^3+3x^4-x^5) dx \\ &= 4 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} + \frac{3x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \right]_0^1 \\ &= 4 \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Άρα

$$\text{var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{1}{15} - \left(\frac{1}{5} \right)^2 = \frac{1}{15} - \frac{1}{25} = \frac{5-3}{75} = \frac{2}{75}.$$

Τελικά: $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{5} = 0.2$ και $\text{var}(X) = \frac{2}{75} \approx 0.0267$.

(γ) Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της X δίνεται από τη σχέση $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$.

Για $0 \leq x \leq 1$:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_0^x 4(1-t)^3 dt = \left[-(1-t)^4 \right]_0^x \\ &= -(1-x)^4 + (1-0)^4 = 1 - (1-x)^4. \end{aligned}$$

Για $x < 0$ ισχύει $F_X(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$, ενώ για $x \geq 1$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_0^1 4(1-t)^3 dt = 1.$$

Επομένως

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - (1-x)^4, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

(δ) Εφόσον η X είναι συνεχής τ.μ., έχουμε

$$P(X = 0.6) = 0.$$

(ε) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{3} < X \leq \frac{4}{3}\right) &= F_X\left(\frac{4}{3}\right) - F_X\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= 1 - \left(1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)^4\right) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} \approx 0.1975. \end{aligned}$$

Άσκηση 2

Θεωρούμε τις δύο συναρτήσεις

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{1-x}}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{αλλού,} \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{k}{x}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

- (α) Βρείτε την τιμή της σταθεράς c ώστε η $f_1(x)$ να είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) και σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση.
- (β) Έστω τυχαία μεταβλητή X με σ.π.π. $f_1(x)$. Υπολογίστε την πιθανότητα $\Pr(X \leq 1/2)$.
- (γ) Υπάρχει σταθερά k ώστε η $f_2(x)$ να μπορεί να είναι σ.π.π.; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
- (δ) Σχολιάστε τα ευρήματά σας στα προηγούμενα ερωτήματα.

Λύση

- (α) Για να είναι η f_1 σ.π.π. πρέπει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 \frac{c}{\sqrt{1-x}} dx = 1.$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \int_0^1 (1-x)^{-1/2} dx.$$

Θέτουμε $u = 1 - x \Rightarrow du = -dx$ και παίρνουμε

$$\int_0^1 (1-x)^{-1/2} dx = \int_1^0 u^{-1/2} (-du) = \int_0^1 u^{-1/2} du = \left[2u^{1/2} \right]_0^1 = 2.$$

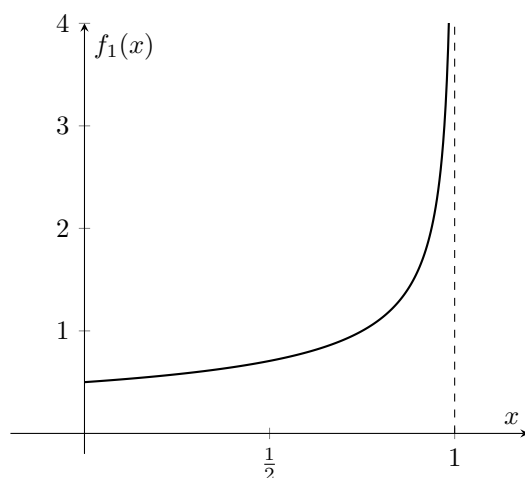
Άρα

$$\int_0^1 \frac{c}{\sqrt{1-x}} dx = c \cdot 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2}.$$

Η πυκνότητα είναι

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-x}}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Η γραφική της παράσταση ορίζεται μόνο στο $(0, 1)$, ξεκινά από την τιμή $f_1(0) = \frac{1}{2}$ και αυξάνεται μονότονα, τείνοντας στο $+\infty$ καθώς $x \rightarrow 1^-$.



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$ για $1/2 < x < 1$.

(β) Για τυχαία μεταβλητή X με σ.π.π. f_1 έχουμε

$$\mathbb{P}(X \leq 1/2) = \int_0^{1/2} f_1(x) dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{2\sqrt{1-x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^{1/2} (1-x)^{-1/2} dx.$$

Όμοια με πριν για $u = 1-x$:

$$\int_0^{1/2} (1-x)^{-1/2} dx = \left[-2\sqrt{1-x} \right]_0^{1/2} = -2\sqrt{\frac{1}{2}} + 2 = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

Επομένως

$$\mathbb{P}(X \leq 1/2) = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(γ) Για να είναι η f_2 σ.π.π. θα έπρεπε να ισχύει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x) dx = \int_0^1 \frac{k}{x} dx = 1.$$

Όμως

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = +\infty,$$

άρα

$$\int_0^1 \frac{k}{x} dx = \begin{cases} +\infty, & k \neq 0, \\ 0, & k = 0. \end{cases}$$

Σε καμία περίπτωση το ολοκλήρωμα δεν μπορεί να ισούται με 1. Συνεπώς δεν υπάρχει σταθερά k ώστε η f_2 να είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

(δ) Από τα προηγούμενα ερωτήματα είδαμε ότι η f_1 είναι έγκυρη σ.π.π. παρότι $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_1(x) = +\infty$. Αυτό συμβαίνει διότι ενώ η f_1 απειρίζεται, το ολοκλήρωμα της στο $(0, 1)$ είναι πεπερασμένο (ίσο με 1).

Αντίθετα, για την f_2 στο βρήκαμε ότι

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = +\infty,$$

άρα το ολοκλήρωμα της f_2 στο $(0, 1)$ είναι άπειρο για κάθε $k \neq 0$ και δεν μπορεί να κανονικοποιηθεί ώστε να δώσει συνολική επιφάνεια ίση με 1.

Το γενικό συμπέρασμα είναι ότι μια μη φραγμένη συνάρτηση μπορεί να είναι σ.π.π. αρκεί να είναι ολοκληρώσιμη με ολοκλήρωμα ίσο με 1. Η βασική προϋπόθεση δεν είναι η μη ύπαρξη άπειρων τιμών, αλλά το αν το εμβαδό κάτω από τη γραφική παράσταση παραμένει πεπερασμένο.

Άσκηση 3

Έστω X_1 και X_2 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με αθροιστική συνάρτηση κατανομής:

$$F_{X_i}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x^2}, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{για } i = 1, 2.$$

(α) Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $X = \max\{X_1, X_2\}$.

(β) Βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X .

Λύση

(α) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\max\{X_1, X_2\} \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x) \mathbb{P}(X_2 \leq x) = F_{X_1}(x) F_{X_2}(x) = F_{X_i}(x)^2 \\ \Rightarrow F_X(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - 2e^{-x^2} + e^{-x^4}, & x \geq 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

(β) Παραγωγίζοντας την αθροιστική συνάρτηση κατανομής που υπολογίσαμε παραπάνω, παίρνουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X .

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 4x \cdot e^{-x^2} - 4x^3 \cdot e^{-x^4}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Άσκηση 4

Η ποσότητα X του καφέ που βρίσκεται σε πακέτα των 200 γρ. είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 200 και διασπορά 16, $X \sim \mathcal{N}(200, 16)$. Αγοράζουμε τέσσερα πακέτα των 200 γρ. Ποια είναι η πιθανότητα:

- (α) Ένα μόνο πακέτο από τα τέσσερα να περιέχει τουλάχιστον 192 γρ. καφέ.
- (β) Το καθένα από τα τέσσερα να έχει βάρος μεταξύ 192 και 204 γρ.

Εκφράστε την απάντησή σας βάσει των τιμών $\Phi(1)$ και $\Phi(2)$ της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής.

Λύση

Ισχύει ότι $X \sim \mathcal{N}(200, 16)$, άρα $Z = \frac{X - 200}{4} \sim N(0, 1)$.

- (α) Έχουμε

$$P(X \geq 192) = P\left(\frac{X - 200}{4} \geq \frac{192 - 200}{4}\right) = P(Z \geq -2) = 1 - P(Z \leq -2) = 1 - \Phi(-2) = \Phi(2) \approx 0.9772.$$

Επομένως

$$P(1 \text{ από τα } 4 \text{ πακέτα έχει βάρος } \geq 192) = \binom{4}{1} (\Phi(2))^1 (1 - \Phi(2))^3 \approx 4 (0.9772) (1 - 0.9772)^3 \approx 4.63 \cdot 10^{-5}.$$

- (β) Έχουμε

$$\begin{aligned} P(192 \leq X \leq 204) &= P\left(\frac{192 - 200}{4} \leq \frac{X - 200}{4} \leq \frac{204 - 200}{4}\right) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-2) \\ &= \Phi(1) + \Phi(2) - 1 \end{aligned}$$

Επομένως

$$P(\text{και τα } 4 \text{ πακέτα είναι μεταξύ } 192 \text{ και } 204 \text{ γρ.}) = (\Phi(1) + \Phi(2) - 1)^4$$

Άσκηση 5

Ένα εργοστάσιο παραγωγής λαμπτήρων φτιάχνει λαμπτήρες όπου η διάρκεια ζωής (σε χρόνια) τους μοντελοποιείται με μια εκθετική κατανομή με μέση τιμή $E[X] = 5$ χρόνια.

- (α) Ποια είναι η πιθανότητα ένας λαμπτήρας να συνεχίζει να λειτουργεί ακόμα μετά από 6 χρόνια;
- (β) Τι ποσοστό των λαμπτήρων θα συνεχίζει να λειτουργεί για περισσότερο από 3, αλλά λιγότερο από 7 χρόνια;
- (γ) Αν τα A και B είναι τα γεγονότα των ερωτημάτων (α) και (β) αντίστοιχα, είναι τα γεγονότα αυτά ανεξάρτητα;
- (δ) Το εργοστάσιο δεσμεύεται να αντικαταστήσει τον λαμπτήρα αν παρουσιαστεί βλάβη σε διάστημα μικρότερο του χρόνου εγγύησης. Για πόσα χρόνια μπορεί να δίνει η εταιρεία εγγύηση, προκειμένου το ποσοστό των λαμπτήρων που αντικαθίστανται να είναι μικρότερο από 10%;

Λύση

Μας δίνεται ότι η τ.μ. X ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή $E[X] = 5 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 5 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{5} = 0.2$. Έτσι:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.2e^{-0.2x} & , \text{ αν } x \geq 0 \\ 0 & , \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι, για οποιοδήποτε $\alpha \geq 0$, ισχύει:

$$P(X \geq \alpha) = P(X > \alpha) = \int_{\alpha}^{+\infty} 0.2e^{-0.2x} dx = [-e^{-0.2x}]_{\alpha}^{+\infty} = 0 - (-e^{-0.2\alpha}) = e^{-0.2\alpha}$$

(α) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(X > 6) = e^{-0.2 \times 6} = e^{-1.2} \approx 0.30119 \Rightarrow P(X > 6) \approx 0.30119$$

(β) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(3 < X < 7) = P(X > 3) - P(X > 7) = e^{-0.2 \times 3} - e^{-0.2 \times 7} = e^{-0.6} - e^{-1.4} \approx 0.54881 - 0.2466 = 0.30221$$

Έτσι, τελικά $P(3 < X < 7) \approx 0.30221$, δηλαδή το 30% των ασανσέρ θα συνεχίσει να λειτουργεί για περισσότερο από 3 αλλά λιγότερο από 7 χρόνια.

(γ) Έχουμε:

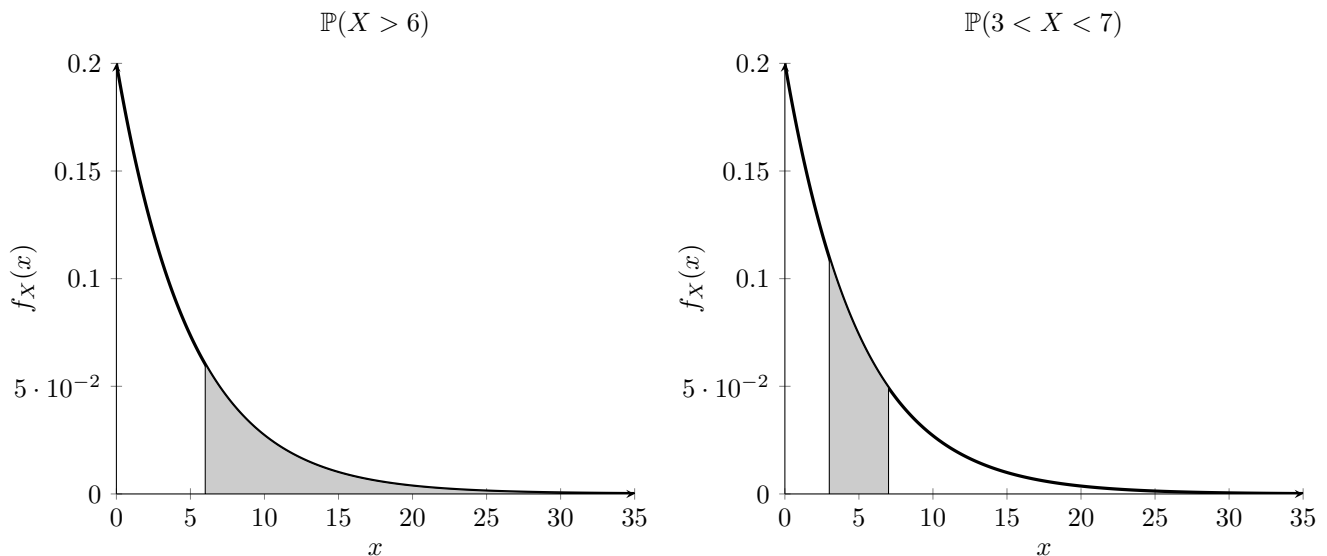
- $A = \{X > 6\}$, με $P(A) \approx 0.30119$
- $B = \{3 < X < 7\}$, με $P(B) \approx 0.30221$

Είναι $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \approx 0.30119 \times 0.30221 \approx 0.091$.

Ακόμα:

$$A \cap B = \{6 < X < 7\}, \text{ με } \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(X > 6) - \mathbb{P}(X > 7) = e^{-1.2} - e^{-1.4} \approx 0.30119 - 0.2466 = \underline{0.05459}$$

Παρατηρούμε ότι $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, οπότε τα γεγονότα A, B δεν είναι ανεξάρτητα



Σχήμα 2: Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 5 και οι περιοχές για $\mathbb{P}(X > 6)$ (αριστερά) και $\mathbb{P}(3 < X < 7)$ (δεξιά).

(δ) Θέλουμε να καθορίσουμε το χρόνο εγγύησης x , ώστε να ισχύει

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq x) &\leq 0.1 \Leftrightarrow F_X(x) \leq 0.1 \Leftrightarrow 1 - e^{-0.2x} \leq 0.1 \Leftrightarrow e^{-0.2x} \geq 1 - 0.1 \Leftrightarrow e^{-0.2x} \geq 0.9 \\ &\Leftrightarrow \ln(e^{-0.2x}) \geq \ln(0.9) \Leftrightarrow -0.2x \geq \ln(0.9) \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{0.2} \ln(0.9) \Leftrightarrow x \leq -5 \ln(0.9) \\ &\Leftrightarrow x \leq -5(-0.105361) \Leftrightarrow x \leq 0.526803 \end{aligned}$$

Άρα, για να αντικαθιστά η εταιρεία το πολύ 10% των λαμπτήρων, θα πρέπει να δοθεί ως εγγύηση 52.6803% του έτους.

Άσκηση 6

Ένα ηλεκτρονικό σύστημα αποτελείται από τέσσερα εξαρτήματα. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X_j παριστάνει τον χρόνο μέχρι να σταματήσει το εξάρτημα $j = 1, 2, 3, 4$ να λειτουργεί. Υποθέτουμε ότι οι X_1, X_2, X_3, X_4 είναι ανεξάρτητα και ομοιόμορφα κατανομημένα τυχαίες μεταβλητές, καθεμία με συνεχή αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(x)$. Το σύστημα συνεχίζει να λειτουργεί όσο το εξάρτημα 1, και τουλάχιστον ένα από τα άλλα τρία εξαρτήματα (2, 3, 4) λειτουργούν.

Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής T , όπου T είναι ο χρόνος μέχρι να πάψει να λειτουργεί το σύστημα.

Λύση

Έστω T ο χρόνος μέχρι να σταματήσει να λειτουργεί το σύστημα και $G(x)$ η αθροιστική συνάρτηση κατανομής του T , δηλαδή

$$G(x) = \mathbb{P}(T \leq x).$$

Θέτουμε:

- A : «το εξάρτημα 1 λειτουργεί ακόμη στη χρονική στιγμή x »,
- B : «τουλάχιστον ένα από τα εξαρτήματα 2,3,4 λειτουργεί ακόμη στη χρονική στιγμή x ».

Το σύστημα λειτουργεί στη χρονική στιγμή x αν και μόνο αν συμβούν ταυτόχρονα τα γεγονότα A και B . Άρα

$$1 - G(x) = \mathbb{P}(T > x) = \mathbb{P}(\text{το σύστημα λειτουργεί ακόμη τη στιγμή } x) = \mathbb{P}(A \cap B).$$

Επειδή οι X_1, X_2, X_3, X_4 είναι ανεξάρτητες τ.μ., τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα, οπότε

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Για το A :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X_1 > x) = 1 - F(x).$$

Για το B : το συμπληρωματικό γεγονός B^c είναι «και τα τρία εξαρτήματα 2,3,4 έχουν χαλάσει μέχρι τη στιγμή x », άρα

$$\mathbb{P}(B^c) = \mathbb{P}(X_2 \leq x, X_3 \leq x, X_4 \leq x) = F^3(x)$$

Άρα

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c) = 1 - F^3(x).$$

Συνεπώς

$$1 - G(x) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = [1 - F(x)][1 - F^3(x)].$$

Άρα

$$G(x) = 1 - [1 - F(x)][1 - F^3(x)] = 1 - (1 - F(x) - F^3(x) + F^4(x)) = F(x) + F^3(x) - F^4(x) = F(x)[1 + F^2(x) - F^3(x)].$$

Επομένως η αθροιστική συνάρτηση κατανομής του T είναι

$$G(x) = F(x)[1 + F^2(x) - F^3(x)].$$

Άσκηση 7

Θεωρούμε τις παρακάτω τέσσερις ανεξάρτητες και ομοιόμορφα κατανομημένες (σε κάθε περίπτωση) τυχαίες μεταβλητές:

- $X^{(1)} \sim U(0, 1)$ (ομοιόμορφη στο $(0, 1)$),
- $X^{(2)} \sim \text{Exp}(\lambda_1)$, π.χ. $\lambda_1 = 1$,
- $X^{(3)} \sim \text{Exp}(\lambda_2)$, π.χ. $\lambda_2 = 1/2$,
- $X^{(4)} \sim N(\mu, \sigma^2)$, π.χ. $\mu = 0, \sigma^2 = 1$.

Να γράψετε πρόγραμμα σε Python ή Matlab που:

- Για κάθε μία από τις παραπάνω κατανομές ορίζει συνάρτηση που επιστρέφει ένα διάνυσμα με n ανεξάρτητα δείγματα (π.χ. $n = 30$) της αντίστοιχης τυχαίας μεταβλητής.
- Για κάθε κατανομή $X^{(j)}$ εκτελεί την εξής διαδικασία:
 - Επαναλαμβάνει N «πειράματα» (π.χ. $N = 10^4$).
 - Σε κάθε πείραμα παράγει n ανεξάρτητα δείγματα $X_1^{(j)}, \dots, X_n^{(j)}$ και υπολογίζει τον δειγματικό μέσο

$$\bar{X}^{(j)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{(j)}.$$

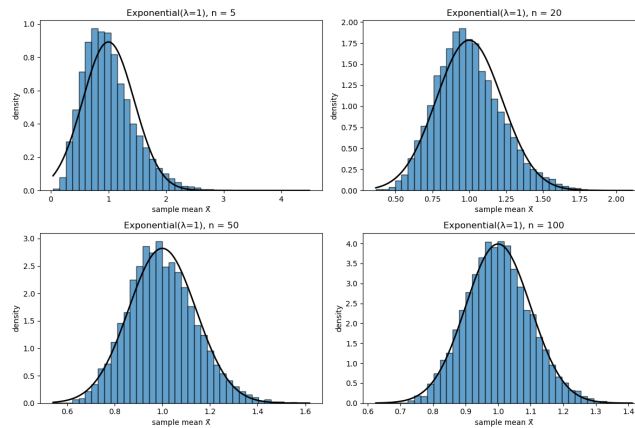
- Αποθηκεύει όλους τους N δειγματικούς μέσους $\bar{X}^{(j)}$ σε έναν πίνακα.

(γ) Για κάθε $j = 1, 2, 3, 4$:

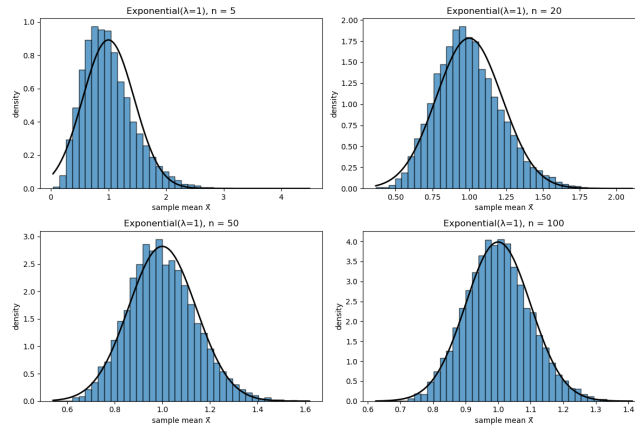
- (α') Υπολογίζει και εκτυπώνει στην οθόνη την *εμπειρική μέση τιμή* και την *εμπειρική διασπορά* των N δειγματικών μέσων $\bar{X}^{(j)}$, και τις συγκρίνει με τις θεωρητικές τιμές $\mathbb{E}[X^{(j)}]$ και $\text{Var}(X^{(j)})/n$.
- (β') Παρουσιάζει την *κατανομή των δειγματικών μέσων* με ιστογράμμο (κανονικοποιημένο σε πυκνότητα). Προαιρετικά, να σχεδιάσετε στην ίδια εικόνα και την καμπύλη της κανονικής κατανομής με παραμέτρους

$$N\left(\mathbb{E}[X^{(j)}], \frac{\text{Var}(X^{(j)})}{n}\right).$$

- (δ) Επαναλάβετε το βήμα β-γ για διαφορετικές τιμές του μεγέθους δείγματος n (π.χ. $n = 5, 20, 50, 100$) για μία από τις κατανομές (π.χ. την εκθετική με $\lambda_1 = 1$) και σχολιάστε πώς αλλάζει το σχήμα του ιστογράμματος των δειγματικών μέσων.



Σχήμα 3: Ερώτημα γ



Σχήμα 4: Ερώτημα δ