

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πέμπτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1 Έστω η τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_X(x) = \begin{cases} cx(5-x) & 0 \leq x \leq 5, \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

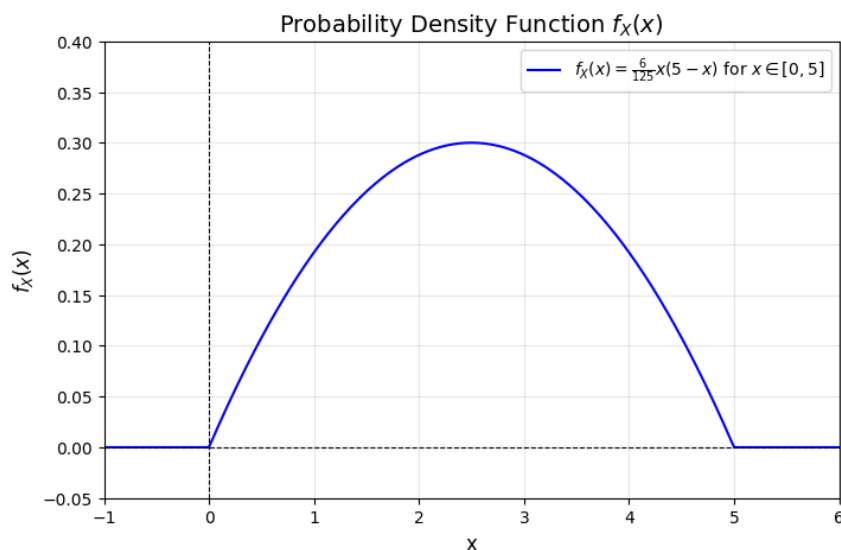
- (α) Υπολογίστε την τιμή του c και σχεδιάστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$.
(β) Υπολογίστε και σχεδιάστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της X , $F_X(x)$.
(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(2 \leq X \leq 3)$.
(δ) Υπολογίστε την μέση τιμή $\mathbb{E}[X]$.
(ε) Υπολογίστε τη διασπορά $\text{Var}(X)$.

Λύση:

- (α) Πρέπει $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, άρα

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} cx(5-x)dx &= 1 \Leftrightarrow \int_0^5 cx(5-x)dx = 1 \Leftrightarrow \\ \left[c \left(\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \right]_0^5 &= 1 \Leftrightarrow c \left(\frac{125}{2} - \frac{125}{3} \right) = 1 \Leftrightarrow \\ c \left(\frac{375}{6} - \frac{250}{6} \right) &= 1 \Leftrightarrow c \frac{125}{6} = 1 \Leftrightarrow \\ c &= \frac{6}{125}. \end{aligned}$$

Η ζητούμενη γραφική παράσταση:



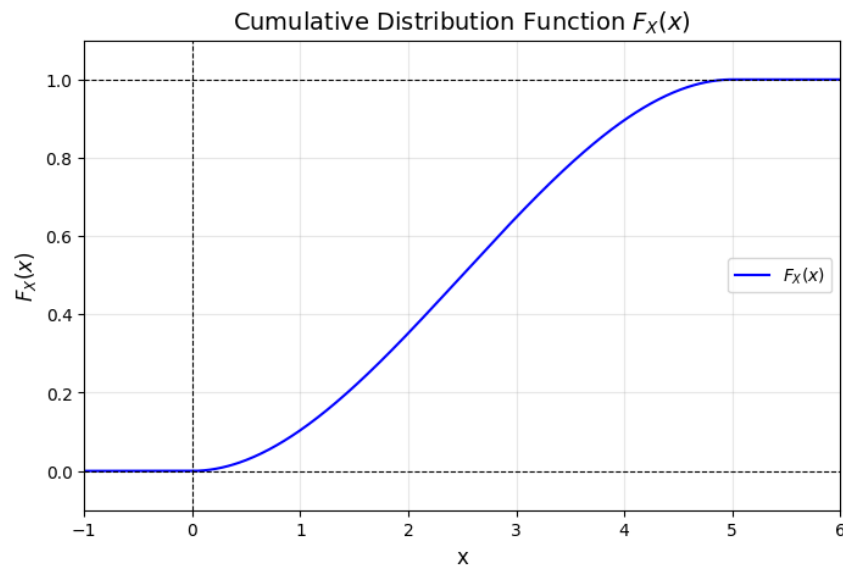
(β) Για $x < 0$ $F_X(x) = 0$, ενώ για $x > 5$ $F_X(x) = 1$. Για $x \in [0, 5]$,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy \\ &= \int_0^x \frac{6}{125} y(5-y) dy = \frac{6}{125} \left[\left(\frac{5y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \right]_0^x \\ &= \frac{6}{125} \left(\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right). \end{aligned}$$

Άρα

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{6}{125} \left(\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) & 0 \leq x \leq 5 \\ 1 & x > 5 \end{cases}$$

Η ζητούμενη γραφική παράσταση:



(γ)

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 3) &= P(X \leq 3) - P(X < 2) \\ &= \frac{6}{125} \left(\frac{5 \cdot 3^2}{2} - \frac{3^3}{3} \right) - \frac{6}{125} \left(\frac{5 \cdot 2^2}{2} - \frac{2^3}{3} \right) \\ &= \frac{6}{125} \left(\frac{27}{2} - \frac{22}{3} \right) = 0.296. \end{aligned}$$

(δ)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^5 x \cdot \frac{6}{125} x(5-x) dx \\ &= \frac{6}{125} \left[\frac{5x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^5 = \frac{6}{125} \left(\frac{625}{3} - \frac{625}{4} \right) \\ &= \frac{6}{125} \cdot \frac{625}{12} = \frac{5}{2} = 2.5. \end{aligned}$$

(ε)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^5 x^2 \cdot \frac{6}{125} x(5-x) dx \\
&= \frac{6}{125} \left[\frac{5x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^5 = \frac{6}{125} \left(\frac{3125}{4} - \frac{3125}{5} \right) \\
&= \frac{6}{125} \cdot \frac{3125}{20} = \frac{3 \cdot 25}{10} = 7.5.
\end{aligned}$$

Οπότε

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = 7.5 - (2.5)^2 = 1.25$$

Άσκηση 2 Μια ομάδα φοιτητών του Πανεπιστημίου αναλαμβάνει να σχεδιάσει ένα νέο smart-phone. Έχοντας νικήσει τον ανταγωνισμό σε όλα τα benchmarks, αποφάσισαν να ασχοληθούν με τη διάρκεια ζωής του τηλεφώνου. Παρατηρούν ότι ο χρόνος λειτουργίας του τηλεφώνου μοντελοποιείται ως μια τυχαία μεταβλητή X (σε ώρες), με την ακόλουθη σ.π.π.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{10}{x^2} & x \geq 10, \\ 0 & x < 10. \end{cases}$$

- (α) Επαληθεύστε ότι η $f_X(x)$ είναι μια έγκυρη σ.π.π.
- (β) Υπολογίστε την πιθανότητα το τηλέφωνο να αντέξει για πάνω από 20 ώρες.
- (γ) Υπολογίστε την Α.Σ.Κ. του X .
- (δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X \geq 35)$
- (ε) Ποια η πιθανότητα από τα 3 prototypes των φοιτητών, μόνο ένα να έχει διάρκεια ζωής πάνω από 35 ώρες;

Λύση:

- (α) Παρατηρούμε ότι $f_X(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, και

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_{10}^{\infty} \frac{10}{x^2} dx = -10 \left[\frac{1}{x} \right]_{10}^{\infty} = -10 \cdot \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{10} \right) = 0 + 10 \cdot \frac{1}{10} = 1.$$

Επομένως, η $f_X(x)$ είναι μια έγκυρη σ.π.π.

- (β) Έχουμε

$$\int_{20}^{\infty} \frac{10}{x^2} dx = -10 \left[\frac{1}{x} \right]_{20}^{\infty} = -10 \cdot \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{20} \right) = \frac{1}{2}.$$

- (γ) Για $x < 10$, $F_X(x) = 0$. Για $x \geq 10$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{10}^x \frac{10}{y^2} dy = -10 \left[\frac{1}{y} \right]_{10}^x = -10 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{10} \right) = 1 - \frac{10}{x}.$$

(δ)

$$\begin{aligned} P(X \geq 35) &= 1 - P(X < 35) = 1 - F_X(35) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{10}{35}\right) = \frac{10}{35}. \end{aligned}$$

(ε) Έστω Y ο αριθμός των prototypes που ξεπερνούν σε διάρκεια ζωής τις 35 ώρες. Η τυχαία μεταβλητή ακολουθεί διωνυμική κατανομή, $Y \sim \Delta(3, P(\geq 35))$. Άρα

$$\begin{aligned} P(Y = 1) &= \binom{3}{1} \cdot P(X \geq 35)^1 \cdot (1 - P(X \geq 35))^3 \\ &= \frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot \frac{10}{35} \cdot \left(\frac{25}{35}\right)^3 = 3 \cdot \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^3 \\ &\cong 0.31 \end{aligned}$$

Άσκηση 3 Μια τυχαία μεταβλητή X έχει αθροιστική συνάρτηση κατανομής

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2} + c \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right), & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}.$$

(α) Υπολογίστε την τιμή του c .

(β) Βρείτε την $f_X(x)$.

Λύση:

(α) Για την αθροιστική συνάρτηση κατανομής γνωρίζουμε ότι πρέπει να υπάρχει συνέχεια από δεξιά, και αφού $F_X(x) = 1$ για $x > 1$ πρέπει

$$F_X(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + c \sin^2\left(\frac{\pi \cdot 1}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}.$$

(β) Γνωρίζουμε ότι $f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$. Για $x < 0$ και $x > 1$, προφανώς $f_X(x) = 0$. Επιπλέον, η τυχαία μεταβλητή X λαμβάνει την τιμή 0 με πιθανότητα $P(X = 0) = 0.5$. Για $0 < x \leq 1$,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} + c \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right) \\ &= \frac{d}{dx} c \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \\ &= c \left(2 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) \cdot \frac{\pi}{2} \right) \\ &= c\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right). \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας σύμφωνα με την τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$,

$$f_X(x) = \frac{c\pi}{2} \sin(\pi x)$$

Και αφού $c = 0.5$, $f_X(x) = \frac{\pi}{4} \sin(\pi x)$.

Άρα

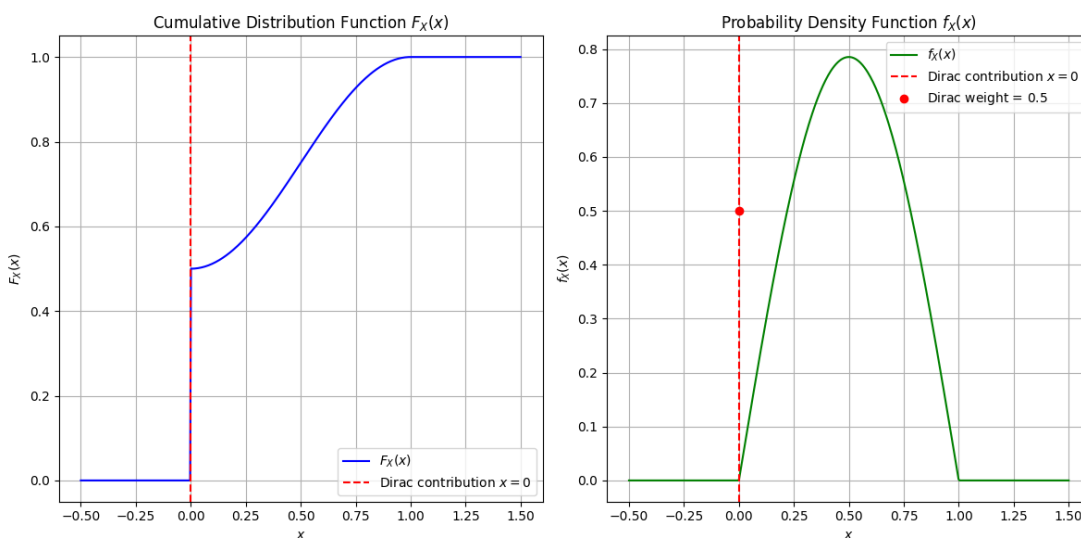
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\delta(x) + \frac{\pi}{4}\sin(\pi x) & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

όπου $\delta(x)$ η συνάρτηση Dirac,

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & , x \neq 0 \\ \infty & , x = 0 \end{cases}$$

με

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) = 1.$$



Άσκηση 4 Έστω $Y = e^X$

- (α) Βρείτε την Α.Σ.Κ. και την σ.π.π. της Y ως συνάρτηση της Α.Σ.Κ. και σ.π.π. της X .
- (β) Βρείτε την σ.π.π. της Y όταν η X είναι Γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή.
- (γ) Έστω τώρα ότι η τυχαία μεταβλητή $X \sim \mathcal{N}(\mu = 15, \sigma^2 = 4)$ μοντελοποιεί το απόθεμα των laptops γνωστής μάρκας σε κάποιο μαγαζί ενόψει Black Friday. Υπολογίστε την πιθανότητα ένα μαγαζί να έχει τουλάχιστον 10 laptops.
- (δ) Αν τώρα θεωρήσουμε ότι η τυχαία μεταβλητή Y αντιπροσωπεύει την αξία της μετοχής της γνωστής μάρκας laptop που μοντελοποιεί η X , ποιά η πιθανότητα $P(Y > 60.000)$;

Λύση:

(α)

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(e^X \leq y) \\ &= P(X \leq \ln(y)) = F_X(\ln(y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(\ln(y)) \\
&= f_X(\ln(y)) \cdot \frac{d}{dy} \ln(y) \\
&= f_X(\ln(y)) \cdot \frac{1}{y}, \quad y > 0 \text{ καθώς } e^X > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

(β) Έχουμε

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Έτσι,

$$f_Y(y) = \frac{f_X(\ln(y))}{y} = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad y > 0.$$

Η τυχαία μεταβλητή Y στην περίπτωση αυτή λέγεται lognormal.

(γ) Ορίζουμε $Z = \frac{X-15}{2} \Rightarrow Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

$$\begin{aligned}
P(X \geq 10) &= P\left(\frac{X-15}{2} \geq \frac{10-15}{2}\right) = P\left(Z \geq -\frac{5}{2}\right) \\
&= 1 - P(Z < -2.5) = 1 - \Phi(-2.5) = \Phi(2.5) = 0.993
\end{aligned}$$

(δ) Ορίζουμε την $Z = \frac{\ln(y)-15}{2}$ και παρατηρούμε ότι $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, καθώς $X = \ln(y)$ είναι Γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή με $\mu = 15$, $\sigma^2 = 4$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
P(Y > 60.000) &= P(\ln(Y) > \ln(60.000)) = P(\ln(Y) > 11) \\
&= P\left(\frac{\ln(Y)-15}{2} > \frac{11-15}{2}\right) = P(Z > -2) \\
&= 1 - P(Z \leq -2) = 1 - \Phi(-2) = \Phi(2) = 0.9772.
\end{aligned}$$

Άσκηση 5 Ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα αποτελείται από μια πηγή πληροφορίας, ένα κανάλι μετάδοσης και ένα δέκτη. Θεωρήστε μια πηγή πληροφορίας που παράγει ένα εκ των τριών συμβόλων με την ίδια πιθανότητα. Στη συνέχεια, το κανάλι εισάγει θόρυβο παραμορφώνοντας το σήμα που έχει επιλεγεί για την αποστολή του εκάστοτε συμβόλου. Έτσι, ο δέκτης λαμβάνει την τιμή $Y = X + N$, όπου X η τιμή που στάλθηκε και N τυχαία μεταβλητή που παριστάνει προσθετικό θόρυβο με κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά $\sigma^2 = 4$.

(α) Υποθέστε ότι ο πομπός κωδικοποιεί τα 3 σύμβολα ως $\{-1, 0, 1\}$. Στον δέκτη το λαμβανόμενο μήνυμα αποκωδικοποιείται ως εξής:

- Αν $Y > \frac{1}{2}$, τότε αποκωδικοποιεί στο 1.
- Αν $Y < -\frac{1}{2}$, τότε αποκωδικοποιεί στο -1.
- Αν $-\frac{1}{2} \leq Y \leq \frac{1}{2}$, τότε αποκωδικοποιεί στο 0.

Καθορίστε την πιθανότητα λάθους για το παραπάνω σχήμα κωδικοποίησης/αποκωδικοποίησης.

(β) Σε μια προσπάθεια να μειωθεί η πιθανότητα λάθους, γίνονται οι ακόλουθες τροποποιήσεις. Ο πομπός κωδικοποιεί τους 3 τύπους μηνυμάτων με τιμές $\{-2, 0, 2\}$, ενώ ο δέκτης αποκωδικοποιεί ως εξής:

- Αν $Y > \frac{1}{2}$, τότε αποκωδικοποιεί στο 2.
- Αν $Y < -\frac{1}{2}$, τότε αποκωδικοποιεί στο -2.
- Αν $-\frac{1}{2} \leq Y \leq \frac{1}{2}$, τότε αποκωδικοποιεί στο 0.

Επαναλάβετε το βήμα (α) για αυτό το σχήμα κωδικοποίησης/αποκωδικοποίησης. Σχολιάστε το αποτέλεσμα.

Λύση:

(α) Ένα λάθος συμβαίνει όταν:

- Το σύστημα συμπεραίνει 0 ή 1, ενώ στάλθηκε -1.
- Το σύστημα συμπεραίνει -1 ή 1, ενώ στάλθηκε 0.
- Το σύστημα συμπεραίνει 0 ή -1, ενώ στάλθηκε 1.

Επομένως, η πιθανότητα λάθους είναι:

$$\begin{aligned} P(e) &= P(X = -1)P\left(Y \geq -\frac{1}{2} | X = -1\right) + P(X = 0)P\left(Y < -\frac{1}{2} \text{ ή } Y > \frac{1}{2} | X = 0\right) \\ &\quad + P(X = 1)P\left(Y \leq \frac{1}{2} | X = 1\right) \\ &= \frac{1}{3}P\left(N \geq \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}P\left(N < -\frac{1}{2} \text{ ή } N > \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}P\left(N \leq -\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Λόγω συμμετρίας της κανονικής κατανομής, $P\left(N \leq -\frac{1}{2}\right) = P\left(N \geq \frac{1}{2}\right)$. Επομένως,

$$\begin{aligned} P(e) &= \frac{4}{3}P\left(N \geq \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}\left(1 - P\left(N \leq \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \frac{4}{3}\left(1 - P\left(\frac{N - 0}{2} \leq \frac{\frac{1}{2} - 0}{2}\right)\right) = \frac{4}{3}\left(1 - P\left(\frac{N}{2} \leq \frac{1}{4}\right)\right). \end{aligned}$$

Ορίζουμε την τ.μ. $Z = \frac{N}{2}$ και παρατηρούμε ότι $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, άρα

$$P(e) = \frac{4}{3} \left(1 - P\left(Z \leq \frac{1}{4}\right) \right) = \frac{4}{3} \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{4}\right) \right) = \frac{4}{3} \cdot 0.4 = 0.535.$$

(β) Ομοίως,

$$\begin{aligned} P(e) &= P(X = -2)P\left(Y \geq -\frac{1}{2} | X = -2\right) + P(X = 0)P\left(Y < -\frac{1}{2} \text{ ή } Y > \frac{1}{2} | X = 0\right) \\ &\quad + P(X = 2)P\left(Y \leq \frac{1}{2} | X = 2\right) \\ &= \frac{1}{3}P\left(N \geq \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{3}P\left(N < -\frac{1}{2} \text{ ή } N > \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}P\left(N \leq -\frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{2}{3}P\left(N \geq \frac{3}{2}\right) + \frac{2}{3}P\left(N \geq \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2}{3} \left(1 - P\left(\frac{N-0}{2} \leq \frac{\frac{3}{2}-0}{2}\right) \right) + \frac{2}{3} \left(1 - P\left(\frac{N-0}{2} \leq \frac{\frac{1}{2}-0}{2}\right) \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(1 - P\left(\frac{N}{2} \leq \frac{3}{4}\right) \right) + \frac{2}{3} \left(1 - P\left(\frac{N}{2} \leq \frac{1}{4}\right) \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(1 - P\left(Z \leq \frac{3}{4}\right) \right) + \frac{2}{3} \left(1 - P\left(Z \leq \frac{1}{4}\right) \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(1 - \Phi\left(\frac{3}{4}\right) \right) + \frac{2}{3} \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{4}\right) \right) = \frac{2}{3} \cdot 0.2266 + \frac{2}{3} \cdot 0.4013 = 0.4185. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ των συμβόλων κωδικοποίησης πράγματι βοήθησε στην μείωση της πιθανότητας λάθους.

Άσκηση 6 Έστω X μια Γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή με $\mu = 5$ και $\sigma^2 = 16$. Υπολογίστε:

(α) $P(X > 4)$ και $P(2 \leq X \leq 7)$.

(β) Αν $P(X < \alpha) = 0.8869$, βρείτε το α .

(γ) Αν $P(13 < X \leq c) = 0.0011$, βρείτε το c .

(δ) Αν $Y = X \cos(\omega t + \theta)$, όπου ω δεδομένη γωνιακή συχνότητα, θ δεδομένη γωνία, και t **μή-τυχαία** μεταβλητή χρόνου, υπολογίστε την πρώτη και δεύτερη ροπή της Y .

Λύση:

(α)

$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - \Phi\left(\frac{4 - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{4 - 5}{4}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{-1}{4}\right) = 0.5987$$

$$P(2 \leq X \leq 7) = P(X \leq 7) - P(X < 2) = \Phi\left(\frac{7 - 5}{4}\right) - \Phi\left(\frac{2 - 5}{4}\right) = 0.4649$$

(β)

$$P(X < \alpha) = 0.8869 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{\alpha - 5}{4}\right) = 0.8869 \Leftrightarrow \frac{\alpha - 5}{4} = 1.21 \Leftrightarrow \alpha - 5 = 4.84 \Leftrightarrow \alpha = 9.84$$

(γ)

$$\begin{aligned} P(13 < X \leq c) &= P(X \leq c) - P(X \leq 13) = \Phi\left(\frac{c - 5}{4}\right) - \Phi\left(\frac{13 - 5}{4}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{c - 5}{4}\right) - \Phi(2) = \Phi\left(\frac{c - 5}{4}\right) - 0.97725 \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{c - 5}{4}\right) - 0.97725 &= 0.0011 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{c - 5}{4}\right) = 0.97835 \Leftrightarrow \\ \frac{c - 5}{4} &= 2.02 \Leftrightarrow c - 5 = 8.08 \Leftrightarrow c = 13.08. \end{aligned}$$

(δ)

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X \cos(\omega t + \theta)] = \cos(\omega t + \theta) \mathbb{E}[X] = 5 \cdot \cos(\omega t + \theta)$$

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(X \cos(\omega t + \theta)) = \cos^2(\omega t + \theta) \cdot \text{Var}(X) = 16 \cdot \cos^2(\omega t + \theta)$$

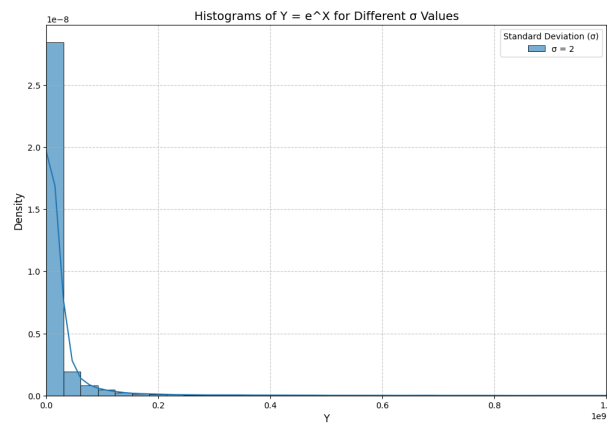
Άσκηση 7 Για το προγραμματιστικό μέρος της άσκησης, θα δημιουργήσετε ένα πρόγραμμα σε Matlab ή Python το οποίο θα προσομοιώνει τη συμπεριφορά των τυχαίων μεταβλητών της άσκησης 4. Συγκεκριμένα:

- (α) Δημιουργήστε 10^4 δείγματα από μια κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu = 15$, $\sigma^2 = 4$.
- (β) Από τα παραπάνω δείγματα υπολογίστε την $Y = e^X$, όπου X η τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή του (α) ερωτήματος.
- (γ) Σχεδιάστε το ιστόγραμμα των δειγμάτων της Y .
- (δ) Μεταβάλλετε το σ του (α) ερωτήματος σε μικρότερες τιμές και επαναλάβετε τα ερωτήματα (β), (γ), εξετάζοντας διάφορες τιμές. Τι παρατηρείτε;

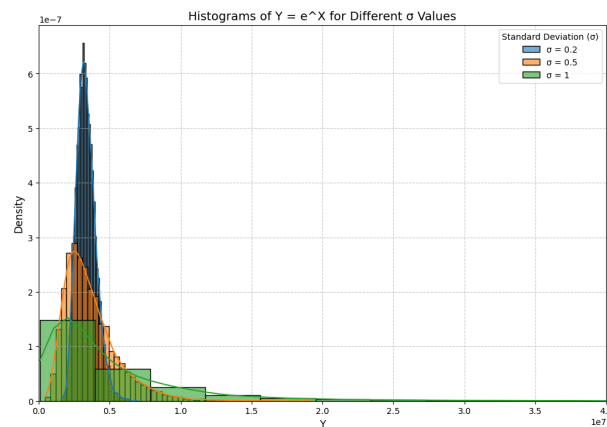
Κώδικας Python:

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import seaborn as sns
4
5 # Parameters
6 mu = 15 # Mean of X
7 sigmas = [0.2, 0.5, 1] # Different standard deviations of X
8 n_samples = 10000 # Number of samples
9
10 # Create subplots
11 plt.figure(figsize=(12, 8))
12
13 for sigma in sigmas:
14     # (a) Generate samples of  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 
15     X = np.random.normal(mu, sigma, n_samples)
16
17     # (b) Compute  $Y = e^X$ 
18     Y = np.exp(X)
19
20     # (c) Plot histogram of Y
21     sns.histplot(Y, bins=50, kde=True, label=f"s = {sigma}", stat="density", alpha=0.6)
22
23 # Customize plot
24 plt.title("Histograms of  $Y = e^X$  for Different s Values", fontsize=14)
25 plt.xlabel("Y", fontsize=12)
26 plt.ylabel("Density", fontsize=12)
27 #plt.xscale("log") # Log scale for better visualization of large values of Y
28 plt.xlim(-0.1, 0.4e8)
29 plt.legend(title="Standard Deviation (s)")
30 plt.grid(True, linestyle="--", alpha=0.7)
31 plt.show()
```

Το ιστόγραμμα της Y όπως αυτή αρχικά ορίζεται: Τα ιστογράμματα της Y καθώς η τυπική



απόκλιση της X μεταβάλλεται:



Παρατηρούμε ότι καθώς το σ μικραίνει, η κατανομή της Y αποκτά όλο και στενότερο σχήμα και μοιάζει περισσότερο με Γκαουσιανή. Χάνει δηλαδή τη χαρακτηριστική συμπεριφορά της μεγάλης ουράς μιας log-normal τυχαίας μεταβλητής.

Παράρτημα

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99009	0.99035	0.99061	0.99086	0.99110	0.99134	0.99157
2.4	0.99180	0.99204	0.99224	0.99245	0.99265	0.99285	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99429	0.99445	0.99461	0.99476	0.99491	0.99506	0.99520
2.6	0.99533	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99597	0.99609	0.99620	0.99631	0.99642
2.7	0.99653	0.99663	0.99673	0.99683	0.99692	0.99702	0.99711	0.99719	0.99728	0.99736
2.8	0.99745	0.99752	0.99759	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99794	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99830	0.99835	0.99841	0.99846	0.99851	0.99855	0.99860
3.0	0.99865	0.99869	0.99873	0.99877	0.99881	0.99885	0.99889	0.99893	0.99896	0.99899
3.1	0.99903	0.99906	0.99909	0.99912	0.99915	0.99918	0.99921	0.99924	0.99927	0.99929
3.2	0.99932	0.99935	0.99938	0.99941	0.99944	0.99947	0.99950	0.99953	0.99956	0.99959
3.3	0.99962	0.99965	0.99968	0.99971	0.99974	0.99977	0.99980	0.99983	0.99986	0.99989
3.4	0.99992	0.99995	0.99998	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
3.5	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
3.6	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
3.7	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
3.8	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
3.9	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
4.0	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
4.1	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
4.2	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
4.3	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
4.4	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
4.5	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
4.6	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
4.7	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
4.8	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
4.9	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999

Example: $\Phi(3.39) = 0.9996505$, $\Phi(0.98) = 0.8365$.

Σχήμα 1: Πίνακας Τυπικής Κανονικής Κατανομής