

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2025-2026
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 07/11/2025

Ημερομηνία Παράδοσης: 20/11/2025

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, **εδώ**. Παραδόσεις με e-mail ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, σκανάρετε ή φωτογραφίστε τις κόλλες των ασκήσεών σας και φτιάξτε ένα PDF που θα περιλαμβάνει όλες τις λύσεις.
- **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΑ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΑ**. Θολές εικόνες μπορεί να οδηγήσουν σε μηδενισμό.

Άσκηση 1

Έστω η τ.μ. X με Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας (ΣΜΠ):

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{c}, & \text{αν } x = -2, -1, 0, 1, 2 \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- (α') Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς c .
- (β') Υπολογίστε τη μέση τιμή $E[X]$ της τ.μ. X .
- (γ') Ορίστε τη νέα τ.μ. $Z = (X - E[X])^2$ και βρείτε τη ΣΜΠ $p_Z(z)$ της τ.μ. Z .
- (δ') Χρησιμοποιώντας το (γ), υπολογίστε τη διασπορά $\text{var}(X)$ της τ.μ. X .
- (ε') Επαληθεύστε το αποτέλεσμα μέσω $\text{var}(X) = \sum_x (x - E[X])^2 p_X(x)$.

Λύση Άσκησης 1.

- (α') Σύμφωνα με το αξίωμα της κανονικοποίησης, πρέπει το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των τιμών της διακριτής τυχαίας μεταβλητής να ισούται με 1:

$$1 = \sum_{x=-2}^2 p_X(x) = \frac{1}{c} (|-2| + |-1| + |0| + |1| + |2|) = \frac{6}{c} \Rightarrow c = 6.$$

- (β') Έχουμε:

$$E[X] = \sum_{x=-2}^2 x p_X(x) = \frac{1}{6} (-2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2) = 0.$$

Εφόσον η $p_X(x)$ είναι άρτια (συμμετρική γύρω από το $x = 0$), η $E[X]$ μηδενίζεται.

(γ') Αφού $E[X] = 0$, θέτουμε $Z = X^2$. Η Z μπορεί να πάρει τις τιμές 1 και 4 (αφού το X μπορεί να είναι $\pm 1, \pm 2$):

$$p_Z(z) = P(X^2 = z) = p_X(-\sqrt{z}) + p_X(\sqrt{z}) = \frac{|-\sqrt{z}|}{6} + \frac{|\sqrt{z}|}{6} = \frac{2\sqrt{z}}{6} = \frac{\sqrt{z}}{3}, \quad z = 1, 4.$$

(δ') Η διασπορά της X ορίζεται ως:

$$\text{var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] = \sum_z z p_Z(z) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{2}{3} = 3.$$

(ε') Επαληθεύουμε το αποτέλεσμα μέσω του ορισμού:

$$\text{var}(X) = \sum_{x=-2}^2 (x - E[X])^2 p_X(x) = (-2)^2 \frac{2}{6} + (-1)^2 \frac{1}{6} + 0 + (1)^2 \frac{1}{6} + (2)^2 \frac{2}{6} = 3.$$

Άσκηση 2

Ένας δέκτης λαμβάνει πακέτα δεδομένων που αποτελούνται από 8 *bits* το καθένα. Κάθε *bit* μεταδίδεται σωστά με πιθανότητα $p = 0.98$, ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα.

(α') Έστω η τυχαία μεταβλητή X που δηλώνει το πλήθος των *λανθασμένων bits* σε ένα πακέτο. Ποια κατανομή ακολουθεί η X και ποιες είναι οι παράμετροί της;

(β') Υπολογίστε την πιθανότητα ένα πακέτο να περιέχει:

- κανένα λάθος *bit*,
- ακριβώς 1 λάθος *bit*,
- τουλάχιστον 2 λάθος *bits*.

(γ') Υπολογίστε τη μέση τιμή $E[X]$ και τη διασπορά $\text{var}(X)$ της X .

(δ') Ο δέκτης λαμβάνει συνολικά 1000 τέτοια πακέτα. Ποιος είναι ο αναμενόμενος συνολικός αριθμός λανθασμένων *bits* που θα ληφθούν;

Λύση Άσκησης 2.

(α') Κάθε bit μεταδίδεται σωστά με πιθανότητα $p = 0.98$, άρα λάθος με πιθανότητα

$$q = 1 - p = 0.02.$$

Σε ένα πακέτο 8 bits, ο αριθμός λανθασμένων bits

$$X \sim \text{Bin}(n = 8, q = 0.02),$$

με Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας (ΣΜΠ)

$$P(X = k) = \binom{8}{k} q^k (1 - q)^{8-k} = \binom{8}{k} (0.02)^k (0.98)^{8-k}, \quad k = 0, 1, \dots, 8.$$

(β') Πιθανότητες:

$$P(X = 0) = \binom{8}{0} (0.02)^0 (0.98)^8 = (0.98)^8 \approx 0.850763.$$

$$P(X = 1) = \binom{8}{1} (0.02)^1 (0.98)^7 = 8 \cdot 0.02 \cdot (0.98)^7 \approx 0.138900.$$

$$P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \approx 1 - (0.850763 + 0.138900) \approx 0.010337.$$

(γ') Αναμενόμενη τιμή και διασπορά Διωνυμικής:

$$E[X] = nq = 8 \cdot 0.02 = 0.16, \quad \text{var}(X) = nq(1 - q) = 8 \cdot 0.02 \cdot 0.98 = 0.1568.$$

(δ') Για 1000 ανεξάρτητα πακέτα, αν X_i είναι τα λάθη στο i -οστό πακέτο, τότε

$$\text{Συνολικά λάθη } S = \sum_{i=1}^{1000} X_i \Rightarrow E[S] = \sum_{i=1}^{1000} E[X_i] = 1000 \cdot 0.16 = \boxed{160}.$$

Άσκηση 3

Ένα δίκαιο ζάρι ρίχνεται διαδοχικά μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά ο αριθμός '6'. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή Y ως τον αριθμό των ρίψεων που απαιτούνται μέχρι την πρώτη επιτυχία.

(α') Γράψτε τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας (ΣΜΠ) της Y . Ποια κατανομή ακολουθεί η Y και ποιες είναι οι παράμετροί της;

(β') Υπολογίστε:

- $P(Y = 1)$, δηλαδή την πιθανότητα να φέρουμε 6 στην πρώτη ρίψη.
- $P(Y = 3)$, δηλαδή να χρειαστούν ακριβώς 3 ρίψεις.
- $P(Y \leq 4)$, δηλαδή να φέρουμε 6 στις πρώτες 4 ρίψεις.

(γ') Υπολογίστε τη μέση τιμή $E[Y]$ και τη διασπορά $var(Y)$ της Y .

(δ') Υποθέστε τώρα ότι θέλουμε να πετύχουμε δύο *επιτυχίες* (δύο εξάρια) αντί για μία. Ποια κατανομή περιγράφει αυτήν την περίπτωση; Ποια είναι η μέση τιμή της νέας τ.μ.;

Λύση Άσκησης 3.

(α') Κάθε ρίψη έχει πιθανότητα επιτυχίας (να έρθει '6')

$$p = \frac{1}{6}, \quad 1 - p = \frac{5}{6}.$$

Ο αριθμός ρίψεων μέχρι την *πρώτη* επιτυχία Y ακολουθεί **Γεωμετρική** κατανομή:

$$P(Y = k) = (1 - p)^{k-1} p = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}, \quad k = 1, 2, \dots$$

(β') Υπολογισμοί:

$$P(Y = 1) = \frac{1}{6} \approx 0.1667, \quad P(Y = 3) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6} = \frac{25}{216} \approx 0.1157.$$

$$P(Y \leq 4) = \sum_{k=1}^4 \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} \approx 0.5174.$$

(γ') Για Γεωμετρική με παράμετρο p ισχύει

$$E[Y] = \frac{1}{p}, \quad var(Y) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Άρα, με $p = \frac{1}{6}$:

$$E[Y] = 6, \quad var(Y) = \frac{5/6}{(1/6)^2} = \frac{5}{6} \cdot 36 = 30.$$

(δ') Αν ζητάμε *δύο* επιτυχίες (δύο εξάρια), ο αριθμός ρίψεων T μέχρι να συμβούν ακολουθεί **Αρνητική Διωνυμική** (*Negative Binomial*) με $r = 2$, $p = \frac{1}{6}$:

$$P(T = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} = \binom{k-1}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Η μέση τιμή είναι

$$E[T] = \frac{r}{p} = \frac{2}{1/6} = 12.$$

$$(προαιρετικά: var(T) = \frac{r(1-p)}{p^2} = \frac{2 \cdot 5/6}{(1/6)^2} = 60.)$$

Άσκηση 4

Έστω οι τ.μ. $X \in \{1, 2\}$ και $Y \in \{1, 2, 3\}$ με από κοινού ΣΜΠ $p(x, y) = c(x + y)$, όπου $x \in \{1, 2\}$, $y \in \{1, 2, 3\}$ και c είναι μία σταθερά.

(α') Υπολογίστε τη σταθερά c .

(β') Βρείτε τις περιθωριακές συναρτήσεις πιθανότητας για τις τ.μ. X και Y , $p_X(x)$, $p_Y(y)$.

(γ') Είναι οι X και Y ανεξάρτητες? Αιτιολογήστε.

(δ') Υπολογίστε $E[X]$, $E[Y]$ και $E[2X + 3Y]$.

Λύση Άσκησης 4.

(α') Πρέπει να ισχύει η κανονικοποίηση:

$$\sum_{x=1}^2 \sum_{y=1}^3 p(x, y) = 1 \Rightarrow \sum_{x=1}^2 \sum_{y=1}^3 c(x + y) = 1.$$

Άρα

$$1 = c \left(\sum_{x=1}^2 \sum_{y=1}^3 x + \sum_{x=1}^2 \sum_{y=1}^3 y \right) = c \left(\underbrace{3 \sum_{x=1}^2 x}_{=3(1+2)=9} + \underbrace{2 \sum_{y=1}^3 y}_{=2(1+2+3)=12} \right) = c(9 + 12) = 21c,$$

οπότε

$$\boxed{c = \frac{1}{21}}.$$

(β') Περιθωριακές συναρτήσεις:

$$p_X(x) = \sum_{y=1}^3 p(x, y) = \sum_{y=1}^3 c(x + y) = c(3x + \underbrace{\sum_{y=1}^3 y}_{=6}) = \frac{3x + 6}{21}, \quad x = 1, 2.$$

Άρα

$$p_X(1) = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}, \quad p_X(2) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}.$$

$$p_Y(y) = \sum_{x=1}^2 p(x, y) = \sum_{x=1}^2 c(x + y) = c \left(\underbrace{\sum_{x=1}^2 x}_{=3} + 2y \right) = \frac{3 + 2y}{21}, \quad y = 1, 2, 3.$$

Άρα

$$p_Y(1) = \frac{5}{21}, \quad p_Y(2) = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}, \quad p_Y(3) = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}.$$

(γ') Έλεγχος ανεξαρτησίας (αν αρκεί ένα αντίπαράδειγμα):

$$p(1, 1) = c(1 + 1) = \frac{2}{21}, \quad p_X(1)p_Y(1) = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{21} = \frac{5}{49}.$$

Εφόσον $\frac{2}{21} \neq \frac{5}{49}$, έχουμε

$$\boxed{p(x, y) \neq p_X(x)p_Y(y) \Rightarrow X, Y \text{ δεν είναι ανεξάρτητες.}}$$

(δ') Μέσες τιμές και γραμμικότητα:

$$E[X] = \sum_{x=1}^2 x p_X(x) = 1 \cdot \frac{3}{7} + 2 \cdot \frac{4}{7} = \frac{11}{7},$$

$$E[Y] = \sum_{y=1}^3 y p_Y(y) = 1 \cdot \frac{5}{21} + 2 \cdot \frac{7}{21} + 3 \cdot \frac{9}{21} = \frac{46}{21}.$$

Για $Z = 2X + 3Y$,

$$E[Z] = E[2X + 3Y] = 2E[X] + 3E[Y] = 2 \cdot \frac{11}{7} + 3 \cdot \frac{46}{21} = \frac{66}{21} + \frac{138}{21} = \boxed{\frac{204}{21} = \frac{68}{7}}.$$

Άσκηση 5

(α') Υπολογίστε το $E[X^2]$ για *Poisson* τ.μ. με μέση τιμή 5.

(β') Αν Y είναι Γεωμετρική τ.μ. με μέση τιμή 4, υπολογίστε $var(2 - 3Y)$.

(γ') Αν Z είναι ο αριθμός εμφανίσεων γεγονότος A (πιθανότητα p) σε 100 δοκιμές, βρείτε $E[Z]$ το A εμφανίστηκε 4 φορές στις πρώτες 6 δοκιμές].

Λύση Άσκησης 5.

(α') Για την τυχαία μεταβλητή *Poisson* ισχύει ότι

$$E[X] = \lambda, \quad var(X) = \lambda.$$

Συνεπώς,

$$var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 \Rightarrow E[X^2] = var(X) + (E[X])^2 = \lambda + \lambda^2.$$

Με $\lambda = 5$, παίρνουμε

$$\boxed{E[X^2] = 5 + 5^2 = 30.}$$

(β') Για τη Γεωμετρική τ.μ. έχουμε

$$E[Y] = \frac{1}{p}, \quad var(Y) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Θέλουμε $var(2 - 3Y)$. Εφόσον $var(a + bY) = b^2 var(Y)$, έχουμε:

$$var(2 - 3Y) = 9 var(Y) = 9 \frac{1-p}{p^2}.$$

Από $E[Y] = 4$ προκύπτει $p = \frac{1}{4}$. Άρα

$$var(2 - 3Y) = 9 \cdot \frac{1 - 1/4}{(1/4)^2} = 9 \cdot \frac{3/4}{1/16} = 9 \cdot 12 = 108.$$

$$\boxed{var(2 - 3Y) = 108.}$$

(γ') Έστω Z το πλήθος εμφανίσεων ενός γεγονότος A σε 100 δοκιμές. Προφανώς $Z \sim \Delta(n = 100, p)$, άρα $E[Z] = 100p$.

Δεδομένου ότι το γεγονός A εμφανίστηκε 4 φορές στις πρώτες 6 δοκιμές, για τις υπόλοιπες 94 δοκιμές ο αριθμός επιτυχιών είναι μια νέα Διωνυμική

$$Y \sim \Delta(n = 94, p).$$

Επομένως

$$Z = 4 + Y \Rightarrow E[Z|A] = 4 + E[Y] = 4 + 94p.$$

$$\boxed{E[Z|A] = 4 + 94p.}$$

	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$
$X = 1$	$3c$	c	$6c$
$X = 2$	$2c$	0	$4c$
$X = 3$	c	c	$2c$

Άσκηση 6

Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας δύο τ.μ. X, Y δίνεται από τον πίνακα :

(α') Βρείτε τη σταθερά c .

(β') Υπολογίστε $p_X(x)$ και $p_Y(y)$.

(γ') Βρείτε $E[X]$, $E[Y]$, $var(X)$, $var(Y)$.

(δ') Υπολογίστε $P(Y < X)$ και $P(Y = X)$.

Λύση Άσκησης 6.

(α') **Εύρεση c (κανονικοποίηση).** Αθροίζουμε όλα τα στοιχεία του πίνακα :

$$\sum_{x=1}^3 \sum_{y=1}^3 p(x, y) = (3c + c + 6c) + (2c + 0 + 4c) + (c + c + 2c) = 10c + 6c + 4c = 20c.$$

$$\text{Άρα } 20c = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{20}}.$$

(β') **Περιθωριακές p_X, p_Y .**

$$p_X(1) = 3c + c + 6c = 10c = \frac{1}{2}, \quad p_X(2) = 2c + 0 + 4c = 6c = \frac{3}{10}, \quad p_X(3) = c + c + 2c = 4c = \frac{1}{5}.$$

$$p_Y(1) = 3c + 2c + c = 6c = \frac{3}{10}, \quad p_Y(2) = c + 0 + c = 2c = \frac{1}{10}, \quad p_Y(3) = 6c + 4c + 2c = 12c = \frac{3}{5}.$$

(γ') **Μέσες τιμές και διασπορές.**

$$E[X] = \sum_{x=1}^3 x p_X(x) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{17}{10} = 1.7,$$

$$E[Y] = \sum_{y=1}^3 y p_Y(y) = 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{23}{10} = 2.3.$$

$$E[X^2] = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{3}{10} + 3^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{35}{10} = 3.5 \Rightarrow \boxed{var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 3.5 - 1.7^2 = 0.61}.$$

$$E[Y^2] = 1^2 \cdot \frac{3}{10} + 2^2 \cdot \frac{1}{10} + 3^2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{61}{10} = 6.1 \Rightarrow \boxed{var(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 6.1 - 2.3^2 = 0.81}.$$

(δ') **Πιθανότητες $P(Y < X)$ και $P(Y = X)$.** Χρησιμοποιούμε τα στοιχεία του πίνακα με $c = \frac{1}{20}$:

	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$
$x = 1$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{6}{20}$
$x = 2$	$\frac{2}{20}$	0	$\frac{4}{20}$
$x = 3$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$

$$P(Y < X) = P(2, 1) + P(3, 1) + P(3, 2) = \frac{2}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \boxed{\frac{1}{5}}.$$

$$P(Y = X) = P(1, 1) + P(2, 2) + P(3, 3) = \frac{3}{20} + 0 + \frac{2}{20} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

Άσκηση 7 (Προγραμματιστική)

Αναπαράγετε προγραμματιστικά (*Python*) τη σύγκριση της Διωνυμικής και *Poisson* κατανομής.

- (α') Για $n = 100$, $p = 0.1$ σχεδιάστε τη Διωνυμική κατανομή και την *Poisson* με $\lambda = 10$.
- (β') Δημιουργήστε 100 δείγματα της Διωνυμικής και απεικονίστε το ιστόγραμμα (πειραματική ΣΜΠ).
- (γ') Συγκρίνετε θεωρητικά και πειραματικά αποτελέσματα. Πότε η *Poisson* προσεγγίζει καλύτερα τη Διωνυμική.

Λύση Άσκησης 7.

```
ask7.py ×
ask7.py > ...
1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  from scipy.stats import binom, poisson
4
5  n = 100
6  p = 0.1
7  lam = n * p
8  x = np.arange(0, 30)
9
10 binomial_pmf = binom.pmf(x, n, p)
11 poisson_pmf = poisson.pmf(x, lam)
12 plt.figure(figsize=(8, 5))
13 plt.plot(x, binomial_pmf, 'bo-', label='Διωνυμική (n=100, p=0.1)')
14 plt.plot(x, poisson_pmf, 'r--', label='Poisson (λ=10)')
15 plt.xlabel('x')
16 plt.ylabel('P(X=x)')
17 plt.title('Σύγκριση Διωνυμικής και Poisson Κατανομής')
18 plt.legend()
19 plt.grid(True)
20 plt.tight_layout()
21 plt.savefig("plot_theoretical.png", dpi=300)
22 plt.show()
23
24 samples = np.random.binomial(n, p, 100)
25
26 plt.figure(figsize=(8, 5))
27 plt.hist(samples, bins=range(0, 30), density=True, color='skyblue', edgecolor='black', label='Πειραματική ΣΜΠ')
28 plt.plot(x, binomial_pmf, 'bo-', label='Θεωρητική Διωνυμική')
29 plt.plot(x, poisson_pmf, 'r--', label='Poisson')
30 plt.xlabel('x')
31 plt.ylabel('Σχετική Συχνότητα / Πιθανότητα')
32 plt.title('Πειραματική ΣΜΠ και Θεωρητικές Κατανομές')
33 plt.legend()
34 plt.grid(True)
35 plt.tight_layout()
36 plt.savefig("plot_experimental.png", dpi=300)
37 plt.show()
38
```