

**HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025**  
**Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης**

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων

## Άσκηση 1

Έστω η τ.μ.  $X$  με συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.):

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{c}, & \text{αν } x = -2, -1, 1, 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- (α') Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς  $c$ .
- (β') Υπολογίστε τη μέση τιμή  $E[X]$  της τ.μ.  $X$ .
- (γ') Ορίζουμε τη νέα τ.μ.  $Z = (X - E[X])^2$ . Υπολογίστε τη σ.π.  $p_Z(z)$  της τ.μ.  $Z$ .
- (δ') Χρησιμοποιώντας το (γ'), υπολογίστε τη διασπορά  $\text{var}(X)$  της τ.μ.  $X$ .
- (ε') Υπολογίστε τη διασπορά της τ.μ.  $X$  χρησιμοποιώντας τον τύπο:  $\text{var}(X) = \sum_x (x - E[X])^2 p_X(x)$ .

- 
- (α') Σύμφωνα με το αξίωμα της κανονικοποίησης, θα πρέπει το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των ενδεχόμενων μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής να ισούται με 1, δηλαδή:

$$1 = \sum_{x=-2}^2 p_X(x) = \frac{1}{c}(4 + 1 + 0 + 1 + 4) = \frac{10}{c} \\ \Rightarrow c = 10$$

- (β') Έχουμε:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_x x \cdot p_X(x) = \sum_{x=-2}^2 x \frac{x^2}{10} \\ &= \frac{1}{10}[-2 \cdot 4 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Γενικά, κάθε τυχαία μεταβλητή  $X$  με άρτια ΣΠΠ πρέπει να έχει  $E[X] = 0$ .

Σημείωση: μια συνάρτηση λέγεται άρτια αν  $f(x) = f(-x)$ , δηλαδή είναι συμμετρική γύρω από τον άξονα των  $y$ .

- (γ') Αφού  $E[X] = 0$ , έχουμε  $Z = X^2$ . Συνεπώς:

$$p_Z(z) = P(\{Z = z\}) = P(\{X^2 = z\}).$$

Εφόσον το  $X$  μπορεί να πάρει τις τιμές  $\pm 1, \pm 2$  (με μη-αρνητική πιθανότητα), η τ.μ.  $Z = X^2$  μπορεί να πάρει μόνο τις τιμές 1, 4.

Άρα

$$p_Z(z) = P(\{X^2 = z\}) = p_X(-\sqrt{z}) + p_X(\sqrt{z}) = \frac{(-\sqrt{z})^2}{10} + \frac{(\sqrt{z})^2}{10} = \frac{z}{5}, \quad \text{για } z = 1, 4$$

- (δ') Η διασπορά μιας τ.μ.  $X$  δίδεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= E\{(X - E[X])^2\} = E[Z] \\ &= \sum_{z=1,4} z \cdot p_Z(z) \\ &= 4 \cdot \frac{4}{5} + 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{17}{5} = 3.4 \end{aligned}$$

(ε) Θα πρέπει να προσθέσουμε το άθροισμα των  $x$  με μη-μηδενική πιθανότητα:

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= \sum_{x=\pm 2, \pm 1} (x - E[X])^2 p_X(x) = (-2)^2 p_X(-2) + (-1)^2 p_X(-1) + 1^2 p_X(1) + 2^2 p_X(2) \\ &= 4 \cdot \frac{4}{10} + 1 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{4}{10} + 1 \cdot \frac{1}{10} \\ &= \frac{16 + 1 + 1 + 16}{10} = 3.4 \end{aligned}$$

## Άσκηση 2

Αν  $E[X] = 5.5$  και  $\text{var}(X) = 8.25$ , υπολογίστε τα εξής:

(α)  $E[(1 + X)^2]$

(β)  $\text{var}(2024 + 2X)$

(γ) Δεδομένου ότι το  $X$  εκφράζει το αποτέλεσμα της ρίψης ενός δίκαιου δεκάεδρου ζαριού, βρείτε την συνάρτηση μάζας πιθανότητας και επαληθεύστε την μέση τιμή και την διασπορά.

Γενικά ισχύουν τα εξής:

$$E[aX + b] = a \cdot E[X] + b$$

$$\text{var}(aX + b) = a^2 \cdot \text{var}(X)$$

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

(α)  $E[X^2 + 2X + 1] = E[X^2] + 2E[X] + 1 = 38.5 + 2 \cdot 5.5 + 1 = 50.5$

(β)  $\text{var}(2024 + 2X) = 2^2 \text{var}(X) = 33$

(γ)

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & \text{αν } x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$E[X] = \sum_{x=1}^{10} x \cdot p_X(x) = \sum_{x=1}^{10} x/10 = 5.5$$

$$E[X^2] = \sum_{x=1}^{10} x^2 \cdot p_X(x) = \sum_{x=1}^{10} x^2/10 = 38.5$$

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 38.5 - 30.25 = 8.25$$

## Άσκηση 3

Ένας δέκτης δυαδικών δεδομένων κάνει λάθη κατά την λήψη μιας ακολουθίας συμβόλων με τέσσερα *bit* το καθένα. Η λήψη τελειώνει όταν ληφθούν 2000 ανεξάρτητα τετράμπιτα σύμβολα (συνολικά 8000 *bits* ή 1000 *bytes*).

(α) Εάν κάθε *bit* λαμβάνεται σωστά με πιθανότητα  $p = 0.99$ , βρείτε τον μέσο όρο των λαθών της λήψης.

(β) Τι τιμή πρέπει να πάρει το  $p$  ώστε ο μέσος όρος των λαθών να είναι το πολύ 20.

(γ) Έστω ότι τώρα εφαρμόζονται διάφορες τεχνικές διόρθωσης λαθών στον δέκτη και πλέον έχει εξασφαλιστεί ότι σε κάθε σύμβολο υπάρχει 0.018 πιθανότητα να διαβαστεί ένα λάθος *bit* και 0.002 πιθανότητα να διαβαστούν δύο λάθος *bits*, ενώ ποτέ δεν θα υπάρχουν περρισσότερα από 2 λάθη ανά σύμβολο. Βρείτε την συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ.  $X$  = (το πλήθος των λάθος *bits* ανά σύμβολο) και υπολογίστε τον μέσο όρο των λαθών, σε *bits*, της λήψης.

---

(α') Ο αριθμός των λαθών είναι μια διωνυμική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή  $n(1 - p)$  όπου  $n = 8000$  και  $p = 0.99$ . Το ζητούμενο είναι ο μέσος όρος δηλαδή η μέση τιμή της μεταβλητής.

$$n(1 - p) = 8000 \cdot 0.01 = 80$$

(β') Εδώ θέλουμε η μέση τιμή να παίρνει τιμή μικρότερη ή ίση του 20.

$$n(1 - p) = 8000 \cdot (1 - p) \leq 20 \implies 1 - p \leq 0.0025 \implies p \geq 0.9975$$

(γ')

$$p_X(x) = \begin{cases} 0.98, & \text{αν } x = 0 \\ 0.018, & \text{αν } x = 1 \\ 0.002, & \text{αν } x = 2 \\ 0, & \text{αν } x = 3, 4 \end{cases}$$

Ο μέσος όρος των λαθών σε *bits* σε ένα σύμβολο θα είναι η μέση τιμή του  $p_X(x)$ ,  $E[X]$ .

$$E[X] = 1 \cdot 0.018 + 2 \cdot 0.002 = 0.022$$

Επομένως ο μέσος όρος όλων των λαθών σε *bits* της λήψης θα είναι  $2000 \cdot 0.022 = 44$ , αφού υπάρχουν 2000 σύμβολα.

## Άσκηση 4

Θεωρείστε τις δύο διακριτές τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα :

|         | $Y = 1$ | $Y = 2$ | $Y = 3$ |
|---------|---------|---------|---------|
| $X = 1$ | 1/4     | 0       | 1/4     |
| $X = 2$ | 1/8     | 0       | 1/8     |
| $X = 3$ | 1/8     | 0       | 1/8     |

(α') Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π.  $p_X(x)$  της τ.μ.  $X$ . Υπολογίστε την μέση τιμή της  $X$ ,  $E[X]$ .

(β') Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π.  $p_Y(y)$  της τ.μ.  $Y$ . Υπολογίστε την μέση τιμή της  $Y$ ,  $E[Y]$ .

(γ') Υπολογίστε την δεσμευμένη σ.π. της τ.μ.  $Y$ ,  $p_{Y/A}(y)$ , δεδομένου του γεγονότος  $A = \{X \leq 2\}$ . Ποια είναι η μέση τιμή, δευτέρα ροπή, και διασπορά της τ.μ.  $Y$  δεδομένου του  $A$ , δηλαδή ποια είναι τα  $E[Y/A]$ ,  $E[Y^2/A]$ , και  $var(Y/A)$ , αντίστοιχα;

(δ') Εστω η τ.μ.  $Z = g(X, Y) = 2X + 3Y + 7$ . Υπολογίστε τη μέση τιμή της τ.μ.  $Z$ .

(ε') Οι μεταβλητές  $X, Y$  είναι εξαρτώμενες ή ανεξάρτητες μεταξύ τους; Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.

---

(α')

$$p_X(x) = \sum_{y=1}^3 p_{X,Y}(x, y), \quad x = 1, 2, 3$$

Από τον πίνακα τιμών της  $p_{X,Y}(x, y)$  προκύπτει εύκολα ότι:

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/2, & x = 1 \\ 1/4, & x = 2 \\ 1/4, & x = 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Εύκολα προκύπτει ότι:

$$E[X] = \sum_{x=1}^3 x \cdot p_X(x) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

(β') Ομοίως,

$$p_Y(y) = \sum_{x=1}^3 p_{X,Y}(x, y), \quad y = 1, 2, 3$$

Από τον πίνακα τιμών της  $p_{X,Y}(x, y)$  προκύπτει εύκολα ότι:

$$p_Y(y) = \begin{cases} 1/2, & y = 1 \\ 1/2, & y = 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε πως:

$$E[Y] = \sum_{y=1}^3 y \cdot p_Y(y) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

(γ') Έχουμε ότι:

$$P_{Y|A}(y) = \frac{P(Y = y, A)}{P(A)}$$

όπου,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X \leq 2) = \sum_{x=1}^2 p_X(x) \\ &= p_X(1) + p_X(2) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Επίσης, ισχύει ότι:

- $\{Y = 1\} \cap \{X \leq 2\} = \{(1, 1), (2, 1)\}$ . άρα,  
 $P(Y = 1, A) = p_{X,Y}(1, 1) + p_{X,Y}(2, 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
- $\{Y = 2\} \cap \{X \leq 2\} = \{(1, 2), (2, 2)\}$ . άρα,  
 $P(Y = 2, A) = p_{X,Y}(1, 2) + p_{X,Y}(2, 2) = 0 + 0 = 0$
- $\{Y = 3\} \cap \{X \leq 2\} = \{(1, 3), (2, 3)\}$ . άρα,  
 $P(Y = 3, A) = p_{X,Y}(1, 3) + p_{X,Y}(2, 3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

Άρα, θα είναι:

$$p_{Y|A}(y) = \begin{cases} 1/2, & y = 1 \\ 1/2, & y = 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Επίσης, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} E[Y|A] &= \sum_{y=1}^3 y \cdot p_{Y|A}(y) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ E[Y^2|A] &= \sum_{y=1}^3 y^2 \cdot p_{Y|A}(y) = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 3^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{10}{2} = 5 \end{aligned}$$

$$\text{var}(Y|A) = E[Y^2|A] - \left(E[Y|A]\right)^2 = 5 - 4 = 1$$

(δ') Έχουμε ότι:

$$E[Z] = E[2 \cdot X + 3 \cdot Y + 7] = 2 \cdot E[X] + 3 \cdot E[Y] + 7 = 2 \cdot \frac{7}{4} + 3 \cdot 2 + 7 = \frac{14}{4} + 13 = 16.5$$

(ε') Οι  $X$  και  $Y$  είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, αφού ισχύει ότι:

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y), \quad x, y = 1, 2, 3.$$

δηλαδή αν πολλαπλασιάσω τις αντίστοιχες πιθανότητες για κάθε τιμή  $X, Y$  καταλήγω στον αρχικό πίνακα από της από κοινού σ.π.

**ΠΡΟΣΟΧΗ!** Η παρατήρηση ότι στο ερώτημα (γ) η δεσμευμένη σ.π της  $Y|A$  είναι ίδια με την σ.π της  $Y$  είναι ελλιπής καθώς αυτό δείχνει την ανεξαρτησία από το γεγονός  $A$ , και όχι ανεξαρτησία μεταξύ των δύο τυχαίων μεταβλητών  $X, Y$ .

## Άσκηση 5

- (α') Υπολογίστε το  $E[X^2]$  για μία *Poisson* τ.μ. με μέση τιμή ίση με 10.
- (β') Αν  $Y$  είναι Γεωμετρική τ.μ. με μέση τιμή 2, υπολογίστε το  $var(1 - 2Y)$ .
- (γ') Η τ.μ.  $Z$  δηλώνει τον αριθμό των εμφανίσεων ενός γεγονότος  $A$  (με πιθανότητα εμφάνισης  $p$ ) σε 100 ανεξάρτητες δοκιμές. Ποια είναι η δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ.  $Z$  δεδομένου ότι το γεγονός  $A$  εμφανίστηκε 7 φορές στις πρώτες 24 δοκιμές;

(α) Για την *Poisson* τ.μ. έχουμε ότι  $E[X] = \lambda = var(X)$ .  
Συνεπώς,  $var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 \Rightarrow E[X^2] = var(X) + (E[X])^2 = \lambda + \lambda^2 = 10 + 10^2 = 110$

(β) Η Γεωμετρική τ.μ. έχει  $E[Y] = 1/p$ ,  $var(Y) = \frac{1-p}{p^2}$ .

Συνεπώς,  $var(1 - 2Y) = 4var(Y) = 4 \frac{1-p}{p^2}$ .

Αλλά,  $E[Y] = 2 = \frac{1}{p} \Rightarrow p = \frac{1}{2}$ .

Τελικά,  $var(1 - 2Y) = 4 \frac{1 - 1/2}{(1/2)^2} = 8$ .

(γ) Προφανώς,  $Z \sim \Delta(n = 100, p)$  και επομένως η (αδέσμευτη) μέση τιμή της  $Z$  είναι  $E[Z] = 100p$ .  
Τώρα, δεδομένης της εκφώνησης, έχουμε ότι  $Z = 7 + Y$ , όπου  $Y \sim \Delta(n = 76, p)$ . Δηλαδή, σε αυτή την περίπτωση έχουμε σίγουρα 7 εμφανίσεις (στις 24 πρώτες δοκιμές) και  $Y$  εμφανίσεις στις τελευταίες 76 δοκιμές, όπου προφανώς  $Y \sim \Delta(76, p)$ . Επομένως,  $E[Z|A \text{ 7 φορές στις 24 πρώτες δοκιμές}] = 7 + E[Y] = 7 + 76p$ .

## Άσκηση 6

Ο Χρήστος αφιερώνει  $K$  ώρες στην αγορά βιβλίων, όπου  $K$  μια διακριτή τ.μ με ισοπίθανες τιμές 1, 2, 3 και 4. Ο αριθμός  $N$  των βιβλίων που αγοράζει ο Χρήστος είναι και αυτός μια διακριτή τ.μ που εξαρτάται από το πόση ώρα φωνίζει. Άρα:

$$p_{N|K}(n/k) = \frac{1}{k}, \text{ για } n = 1, \dots, k.$$

- (α) Υπολογίστε την από κοινού σ.π. των  $K$  και  $N$ .
- (β) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π. της  $N$ .
- (γ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη σ.π. της  $K$  δεδομένου του γεγονότος  $N = 2$ .
- (δ) Μας δίδεται ότι ο Χρήστος αγόρασε τουλάχιστον 2 αλλά όχι περισσότερα από 3 βιβλία. Υπολογίστε τη δεσμευμένη μέση τιμή και διασπορά της  $K$ , δεδομένης της παραπάνω πληροφορίας.
- (ε) Το κόστος κάθε βιβλίου είναι τ.μ. με μέση τιμή ίση με 3 ευρώ. Υπολογίστε τη μέση τιμή του ποσού το οποίο ο Χρήστος ξόδεψε συνολικά σε βιβλία. Υπόδειξη: Δεσμεύστε ως προς τα γεγονότα  $N = 1, \dots, N = 4$  και χρησιμοποιήστε το θεώρημα ολικής μέσης τιμής.

(α) Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι  $p_{N,K}(n, k) = p_{N|K}(n|k)p_K(k)$  για να υπολογίσουμε την από κοινού σ.π.π.:

$$p_{N,K}(n, k) = \begin{cases} 1/(4k), & k = 1, 2, 3, 4 \text{ και } n = 1, \dots, k; \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(β) Η σ.π.π  $p_N(n)$  δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$p_N(n) = \sum_k p_{N,K}(n, k) = \sum_{k=n}^4 \frac{1}{4k}$$

δηλαδή:

$$p_N(n) = \begin{cases} 25/48, & n = 1 \\ 13/48, & n = 2 \\ 7/48, & n = 3 \\ 3/48, & n = 4 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(γ) Η δεσμευμένη  $\sigma.\pi.\pi$  είναι:

$$p_{K|N}(k|2) = \frac{p_{N,K}(2,k)}{p_N(2)} = \begin{cases} 6/13, & k = 2; \\ 4/13, & k = 3; \\ 3/13, & k = 4; \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(δ) Έστω  $A$  το γεγονός ότι  $2 \leq N \leq 3$ . Πρώτα υπολογίζουμε την δεσμευμένη  $\sigma.\pi.\pi$  του  $K$  δεδομένου του  $A$ :

$$p_{K|A}(k) = \frac{P(K=k, A)}{P(A)}$$

$$P(A) = p_N(2) + p_N(3) = 5/12$$

$$P(K=k, A) = \begin{cases} 1/8, & k = 2; \\ 1/12 + 1/12, & k = 3; \\ 1/16 + 1/16, & k = 4; \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$p_{K|A}(k) = \begin{cases} 3/10, & k = 2; \\ 2/5, & k = 3; \\ 3/10, & k = 4; \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Επειδή η δεσμευμένη  $\sigma.\pi.\pi$  του  $K$  δεδομένου του  $A$  είναι συμμετρική γύρω από το  $k = 3$ , γνωρίζουμε ότι  $E[K|A] = 3$ . Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την δεσμευμένη διασπορά του  $K$  δεδομένου του  $A$ :

$$var(K|A) = E[(K - E[K|A])^2|A] = 3/10(2-3)^2 + 2/5(0) + 3/10(4-3)^2 = 3/5$$

(ε) Έστω  $C_i$  το κόστος ενός βιβλίου  $i$  και  $E[C_i] = 3$ . Έστω  $T$  το συνολικό κόστος, δηλαδή  $T = C_1 + \dots + C_N$ . Μπορούμε να υπολογίσουμε το  $E[T]$  ως εξής:

$$\begin{aligned} E[T] &= \sum_{i=1}^4 E[T|N=i]p_N(i) \\ &= E[C_i]p_N(1) + 2E[C_i]p_N(2) + 3E[C_i]p_N(3) + 4E[C_i]p_N(4) \\ &= 3(25/48) + 6(13/48) + 9(7/48) + 12(1/16) \\ &= 21/4 \end{aligned}$$