

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2025-2026
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1

Τραβάμε 7 χαρτιά από μια καλά ανακατεμένη τράπουλα 52 χαρτιών. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

1. Τα 7 χαρτιά να περιέχουν ακριβώς 3 άσσους
2. Τα 7 χαρτιά να περιέχουν ακριβώς 2 βαλέδες
3. Τα 7 χαρτιά να περιέχουν ακριβώς 3 άσσους ή 2 βαλέδες

Λύση

1. Συνολικά υπάρχουν $\binom{52}{7}$ δυνατοί τρόποι να τραβήξουμε 7 φύλλα από μια τράπουλα 52 φύλλων. Υπάρχουν λοιπόν $\binom{4}{3}$ δυνατοί τρόποι να τραβήξουμε 3 από τους 4 άσσους, και $\binom{48}{4}$ δυνατοί τρόποι να τραβήξουμε τα υπόλοιπα 4 φύλλα από τα 48 φύλλα της τράπουλας που έχουν απομείνει.

Συνεπώς, υπάρχουν $\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{4}$ δυνατοί συνδυασμοί να τραβήξουμε 7 φύλλα που να περιέχουν ακριβώς 3 άσσους.

Για να βρούμε την πιθανότητα ότι στα 7 φύλλα περιέχονται 3 άσσοι, διαιρούμε αυτόν τον αριθμό με το συνολικό πλήθος των δυνατών συνδυασμών να διαλέξουμε 7 φύλλα από μια τράπουλα των 52 φύλλων, και τελικά έχουμε:

$$p_1 = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{4}}{\binom{52}{7}} = \frac{4 \cdot 194,580}{133,784,560} = \frac{778,320}{133,784,560} \approx 0.0058.$$

2. Με ανάλογο συλλογισμό όπως παραπάνω, υπάρχουν $\binom{4}{2}$ δυνατοί τρόποι να τραβήξουμε 2 από τους 4 βαλέδες, και $\binom{48}{5}$ δυνατοί τρόποι να τραβήξουμε τα υπόλοιπα 5 φύλλα από τα 48 φύλλα της τράπουλας που έχουν απομείνει.

Συνεπώς, υπάρχουν $\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{5}$ δυνατοί συνδυασμοί να τραβήξουμε 7 φύλλα, που να περιέχουν ακριβώς 2 βαλέδες.

Η πιθανότητα στα 7 φύλλα να περιέχονται 2 βαλέδες είναι τελικά:

$$p_2 = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{5}}{\binom{52}{7}} = \frac{6 \cdot 1,712,304}{133,784,560} = \frac{10,273,824}{133,784,560} \approx 0.0768.$$

3. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

$A = \{\text{Τραβήξαμε 7 φύλλα που περιέχουν ακριβώς 3 άσσους}\}$

$B = \{\text{Τραβήξαμε 7 φύλλα που περιέχουν ακριβώς 2 βαλές}\}$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η πιθανότητα της ένωσης: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ είναι γνωστές, από τα προηγούμενα ερωτήματα, άρα πρέπει να βρούμε την πιθανότητα $P(A \cap B)$. Το γεγονός $(A \cap B)$ συμβαίνει με την επιλογή 3 από τους 4 άσσους, 2 από τους 4 βαλές, και 2 από τα υπόλοιπα 44 φύλλα (τα οποία δεν είναι άσσοι ή βαλές).

Συνολικά λοιπόν, υπάρχουν $\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{44}{2}$ δυνατοί τρόποι για να επιλέξουμε 7 φύλλα που περιέχουν ακριβώς 3 άσσους και 2 βαλές. Άρα, η πιθανότητα $P(A \cap B)$ θα είναι:

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{44}{2}}{\binom{52}{7}} = \frac{4 \cdot 6 \cdot \frac{44 \cdot 43}{2}}{133,784,560} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 946}{133,784,560} = \frac{22,704}{133,784,560} \approx 1.6971 \cdot 10^{-4}.$$

Τελικά, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$p_3 = p_1 + p_2 - P(A \cap B) = 0.0058 + 0.0768 - 1.6971 \cdot 10^{-4} \approx 0.0824.$$

Άσκηση 2

- Ένας επταψήφιος αριθμός τηλεφώνου $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7$ θεωρείται εύκολος να τον θυμάται κανείς, εάν τα τρία πρώτα ψηφία του, $a_1 a_2 a_3$, είναι ίδια με τα επόμενα τρία ψηφία, $a_4 a_5 a_6$, ή με τα τελευταία τρία ψηφία, $a_5 a_6 a_7$. Πόσοι τέτοιοι 'εύκολοι' επταψήφιοι αριθμοί τηλεφώνου υπάρχουν;
- Δέκα φίλοι αποφάσισαν να παίξουν έναν αγώνα μπάσκετ. Με πόσους τρόπους μπορούν να χωριστούν σε δύο ομάδες των 5 ατόμων;
- Σε ένα τραπέζι γάμου πρέπει να καθίσουν 50 προσκεκλημένοι σε 5 κυκλικά τραπέζια των 10 ατόμων. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν;

Λύση

- Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1η Περίπτωση: Αν $a_1 a_2 a_3 = a_4 a_5 a_6$, τότε υπάρχουν $10^3 \cdot 10$ "εύκολοι" επταψήφιοι αριθμοί τηλεφώνου διότι έχω 10 επιλογές για κάθε ένα από τα 3 πρώτα ψηφία, αλλά η επιλογή αυτών καθορίζει και τα επόμενα 3 ψηφία, και 10 δυνατές επιλογές για το τελευταίο.

2η Περίπτωση: Ομοίως, αν $a_1 a_2 a_3 = a_5 a_6 a_7$, υπάρχουν $10^3 \cdot 10$ "εύκολοι" επταψήφιοι αριθμοί τηλεφώνου διότι έχω 10 επιλογές για κάθε ένα από τα 3 πρώτα ψηφία, αλλά η επιλογή αυτών καθορίζει και τα τελευταία 3 ψηφία, και 10 δυνατές επιλογές για το μεσαίο, τέταρτο, ψηφίο.

3η Περίπτωση: Αν $a_1 a_2 a_3 = a_4 a_5 a_6 = a_5 a_6 a_7$, δηλαδή αν ο αριθμός έχει και τα 7 ψηφία του ίδια μεταξύ τους, τότε υπάρχουν 10 "εύκολοι" επταψήφιοι αριθμοί τηλεφώνου.

Η 3η Περίπτωση εμπεριέχεται στις δύο πρώτες, οπότε οι "εύκολοι" επταψήφιοι αριθμοί τηλεφώνου που προκύπτουν είναι:

$$10^3 \cdot 10 + 10^3 \cdot 10 - 10 = 19,990.$$

- Όλα τα μέλη μιας ομάδας είναι ισοδύναμα, αφού στην εκφώνηση δεν διευκρινίζεται κάτι διαφορετικό. Οπότε μας ενδιαφέρουν οι συνδυασμοί και όχι η διάταξη. Επιλέγουμε 5 από τα 10 άτομα και τα υπόλοιπα 5 από τα 5 που απομένουν, δηλαδή:

$$C(10, 5) \cdot C(5, 5) = \frac{10!}{5! \cdot 5!} \cdot 1 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{120} = 252.$$

Όμως, στην πραγματικότητα, έχουμε τις μισές από αυτές τις επιλογές διότι οι 252 τρόποι που βρήκαμε συμπεριλαμβάνουν δύο φορές την κάθε λύση. Για παράδειγμα, έστω ότι μία από τις επιλεγμένες πεντάδες είναι η $A = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$. Τότε, η άλλη ομάδα, προφανώς, και θα είναι η $B = \{p_6, p_7, p_8, p_9, p_{10}\}$. Στους 252 τρόπους, όμως, συμπεριλαμβάνεται και η επιλογή των $A = \{p_6, p_7, p_8, p_9, p_{10}\}$ και των υπολοίπων $B = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ οι οποίες δεν αποτελούν διαφορετικές επιλογές, η σύνθεση των δύο ομάδων θα είναι τελικά η ίδια. Άρα, υπάρχουν $252/2 = 126$ διαφορετικοί τρόποι να χωριστούν οι δέκα φίλοι σε δύο ομάδες των 5 ατόμων.

- Αρχικά, χρειάζεται να κατανείμουμε τους προσκεκλημένους στα 5 τραπέζια. Για να γίνει αυτό, τους χωρίζουμε σε πέντε ομάδες των δέκα ατόμων. Υπάρχουν $\frac{50!}{10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10!}$ διαφορετικοί τρόποι να πραγματοποιηθεί το παραπάνω.

Σε κάθε τραπέζι, οι καλεσμένοι μπορούν να καθίσουν με 9! τρόπους.

Προσοχή: Οι πιθανές μεταθέσεις των 10 ατόμων είναι 10!, όμως τα τραπέζια είναι κυκλικά. Επομένως, η διάταξη $abcde fghik$ είναι ίδια με την $kabcde fghi$, με την $ikabcde fgh$ κ.λ.π, που είναι συνολικά 10 στον αριθμό. Άρα, $\frac{10!}{10} = 9!$ διαφορετικοί τρόποι να καθίσουν οι καλεσμένοι σε ένα τραπέζι.

Τα διαφορετικά τραπέζια είναι πέντε. Οπότε οι διαφορετικοί τρόποι να καθίσουν οι καλεσμένοι σε αυτά είναι $(9!)^5 = \left(\frac{10!}{10}\right)^5$.

Επειδή όμως τα 5 τραπέζια είναι όμοια, η σειρά με την οποία θα ορίσουμε την κάθε ομάδα δεν έχει σημασία. Άρα αν αλλάξουμε ποια ομάδα κάθεται σε ποιο τραπέζι, δεν παίρνουμε διαφορετική διάταξη. Πρέπει λοιπόν να διαιρέσουμε με τον αριθμό των μεταθέσεων των 5 ομάδων, δηλαδή με 5!.

Συμπερασματικά, λοιπόν, οι 50 προσκεκλημένοι μπορούν να καθίσουν σε 5 κυκλικά τραπέζια των 10 ατόμων με

$$\frac{50!}{5! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10!} \cdot \left(\frac{10!}{10}\right)^5 = \frac{50!}{5! \cdot (10!)^5} \cdot \frac{(10!)^5}{10^5} = \frac{50!}{5! \cdot 10^5}$$

τρόπους.

Άσκηση 3

- Πόσοι δυνατοί αναγραμματισμοί (και χωρίς νόημα) μπορούν να γίνουν από τα γράμματα των λέξεων:
 - ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ
 - ΣΟΚΟΛΑΤΑ
 - ΜΟΥΣΤΟΚΟΥΛΟΥΡΟ
- Παλινδρομικές λέξεις ονομάζονται εκείνες που μπορούν να διαβαστούν το ίδιο και προς τις δύο κατευθύνσεις. Πχ ΑΝΝΑ, ΣΟΦΟΣ. Πόσες παλινδρομικές λέξεις 7 γραμμάτων (και χωρίς νόημα) μπορούν να σχηματιστούν με το ελληνικό αλφάβητο (Α-Ω);

Λύση

- Ο τύπος για τους ανασυνδυασμούς n αντικειμένων εκ των οποίων υπάρχουν k_1 αντικείμενα τύπου 1, k_2 αντικείμενα τύπου 2, ..., k_m αντικείμενα τύπου m είναι:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \dots \cdot k_m!}$$

Με βάση αυτόν τον τύπο, η λύση του προβλήματος έχει ως εξής:

- (α') Με τη λέξη **ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ** ($\boxed{1: \Pi}, \boxed{1: \Gamma}, \boxed{1: \Theta}, \boxed{1: \Lambda}, \boxed{1: \text{N}}, \boxed{1: \text{O}}, \boxed{2: \text{T}}, \boxed{1: \text{H}}, \boxed{1: \text{E}}, \boxed{1: \Sigma}$) μπορούμε να κάνουμε:

$$\frac{11!}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{11!}{2!} = \frac{39,916,800}{2} = 19,958,400$$

αναγραμματισμούς.

(Η απάντηση: $\frac{11!}{2}$, χωρίς περαιτέρω υπολογισμούς, είναι αρκετή:)

- (β') Με τη λέξη **ΣΟΚΟΛΑΤΑ** ($\boxed{1: \Sigma}, \boxed{2: \text{O}}, \boxed{1: \text{K}}, \boxed{1: \Lambda}, \boxed{2: \text{A}}, \boxed{1: \text{T}}$) μπορούμε να κάνουμε:

$$\frac{8!}{1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{8!}{2! \cdot 2!} = \frac{40,320}{4} = 10,080$$

αναγραμματισμούς.

- (γ') Με τη λέξη **ΜΟΥΣΤΟΚΟΥΛΟΥΡΟ** ($\boxed{1: \text{M}}, \boxed{5: \text{O}}, \boxed{3: \text{Y}}, \boxed{1: \Sigma}, \boxed{1: \text{T}}, \boxed{1: \text{K}}, \boxed{1: \Lambda}, \boxed{1: \text{P}}$) μπορούμε να κάνουμε:

$$\frac{14!}{1! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{14!}{5! \cdot 3!} = \frac{87,178,291,200}{120 \cdot 6} = \frac{87,178,291,200}{720} = 121,080,960$$

αναγραμματισμούς.

- Μια παλινδρομική λέξη 7 γραμμάτων, καθορίζεται από τα πρώτα 4 γράμμάτά της, αφού το 5ο, 6ο, 7ο γράμμα της καθορίζονται από τα πρώτα 3 (π.χ. ΑΝΕΜ $\Rightarrow$ ΑΝΕΜΕΝΑ). Επομένως αρκεί να βρούμε πόσες λέξεις 4 γραμμάτων μπορούμε να φτιάξουμε με το ελληνικό αλφάβητο:

$$24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 = 24^4.$$

Άσκηση 4

Σε ένα πανεπιστήμιο προσφέρονται 8 μαθήματα χαμηλού επιπέδου: $\{L_1, L_2, \dots, L_8\}$ και 10 μαθήματα υψηλού επιπέδου: $\{H_1, H_2, \dots, H_{10}\}$. Ένα έγκυρο πρόγραμμα σπουδών αποτελείται από 4 μαθήματα χαμηλού επιπέδου και 3 μαθήματα υψηλού επιπέδου.

- α) Πόσα είναι τα πιθανά διαφορετικά έγκυρα προγράμματα σπουδών;
- β) Υποθέστε ότι τα $\{H_1, H_2, \dots, H_5\}$ έχουν ως προαπαιτούμενο το L_1 , και τα $\{H_6, H_7, \dots, H_{10}\}$ έχουν ως προαπαιτούμενα τα L_2 και L_3 . Για παράδειγμα, οποιοδήποτε πρόγραμμα σπουδών που περιέχει κάποιο από τα $\{H_1, H_2, \dots, H_5\}$ για να είναι έγκυρο πρέπει να περιέχει και το L_1 . Πόσα διαφορετικά έγκυρα προγράμματα σπουδών υπάρχουν;

Λύση

- α) Υπάρχουν $\binom{8}{4}$ τρόποι για να πάρει κάποιος 4 μαθήματα χαμηλού επιπέδου και $\binom{10}{3}$ τρόποι για να επιλέξει 3 μαθήματα υψηλού επιπέδου. Επομένως, υπάρχουν $\binom{8}{4} \cdot \binom{10}{3}$ διαφορετικά έγκυρα προγράμματα σπουδών.
- β) Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Έστω ότι δεν επιλέγουμε το L_1 . Τότε, πρέπει να επιλεχθούν τα L_2 και L_3 , αλλιώς δεν επιτρέπεται να πάρουμε κάποιο μάθημα υψηλού επιπέδου. Επομένως, χρειάζεται να επιλέξουμε 2 επιπλέον μαθήματα χαμηλού επιπέδου, από τα 5 υπολειπόμενα $\{L_4, L_5, L_6, L_7, L_8\}$, και 3 μαθήματα υψηλού επιπέδου από τα 5 διαθέσιμα $\{H_6, H_7, H_8, H_9, H_{10}\}$. Άρα, μπορούμε να έχουμε $\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{3}$ διαφορετικά έγκυρα προγράμματα σπουδών.

Έστω ότι επιλέγουμε το L_1 , αλλά δεν επιλέγουμε ούτε το L_2 , ούτε το L_3 . Άρα, επιλέγουμε 3 επιπλέον μαθήματα χαμηλού επιπέδου από τα $\{L_4, L_5, L_6, L_7, L_8\}$ και 3 μαθήματα υψηλού επιπέδου από τα $\{H_1, H_2, H_3, H_4, H_5\}$. Μπορούμε να έχουμε $\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{3}$ διαφορετικά έγκυρα προγράμματα σπουδών.

Έστω ότι επιλέγουμε το L_1 και ένα εκ των L_2 και L_3 . Τότε, υπάρχουν 2 τρόποι να επιλέξουμε μεταξύ του L_2 και L_3 , $\binom{5}{2}$ τρόποι να διαλέξουμε 2 μαθήματα χαμηλού επιπέδου από τα $\{L_4, L_5, L_6, L_7, L_8\}$ και $\binom{5}{3}$ τρόποι να διαλέξουμε 3 μαθήματα υψηλού επιπέδου από τα $\{H_1, \dots, H_5\}$. Άρα, μπορούμε να έχουμε $2 \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{3}$ διαφορετικά έγκυρα προγράμματα σπουδών.

Έστω ότι επιλέγουμε τα L_1, L_2 και L_3 . Σε αυτήν την περίπτωση, μπορούμε να έχουμε $\binom{5}{1} \cdot \binom{10}{3}$ διαφορετικά έγκυρα προγράμματα σπουδών.

Δεν έχουμε "διπλές μετρήσεις", επειδή δεν υπάρχει επικάλυψη στις παραπάνω περιπτώσεις, είναι μεταξύ τους ξένες. Συμπερασματικά, το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει προσθέτοντας τα διαφορετικά έγκυρα προγράμματα σπουδών των τεσσάρων περιπτώσεων παραπάνω:

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{3} + \binom{5}{3} \cdot \binom{5}{3} + 2 \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{3} + \binom{5}{1} \cdot \binom{10}{3} = 1,000.$$

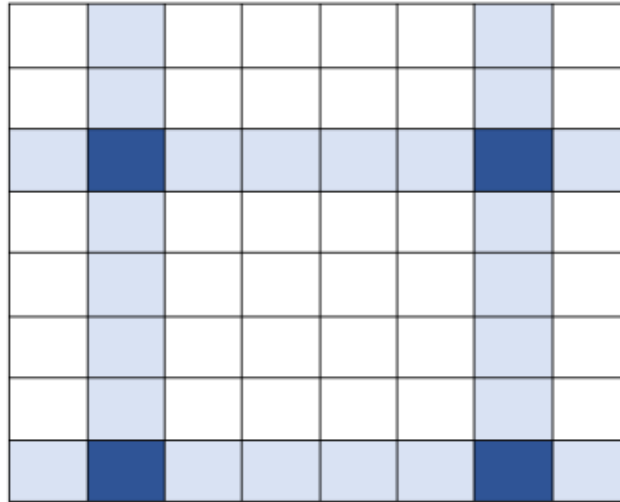
Άσκηση 5

- (α) Με πόσους τρόπους είναι δυνατόν να επιλεγούν δύο τετράγωνα από μια 8×8 σκακίερα, έτσι ώστε να μην βρίσκονται ούτε στην ίδια γραμμή ούτε στην ίδια στήλη;
- (β) Με πόσους τρόπους είναι δυνατόν να επιλεγούν τέσσερα τετράγωνα από μια 8×8 σκακίερα, έτσι ώστε να σχηματίζουν ένα (ορθογώνιο) παραλληλόγραμμο;

Λύση

- α) Επιλέγουμε τυχαία το πρώτο τετράγωνο στην σκακίερα. Αφού η σκακίερα έχει συνολικά 64 τετράγωνα, έχουμε 64 πιθανές επιλογές. Για την επιλογή του δεύτερου τετραγώνου πρέπει να λάβουμε υπόψιν τον περιορισμό "να μην είναι στην ίδια γραμμή ή στήλη" και άρα να εξαιρέσουμε τα τετράγωνα που βρίσκονται στην γραμμή και την στήλη του πρώτου τετραγώνου. Συνολικά λοιπόν εξαιρούμε $7 + 7 = 14$ τετράγωνα και εξαιρούμε βέβαια συγχρόνως και το ίδιο το πρώτο τετράγωνο, άρα 15. Οι επιλογές μας άρα είναι $64 - 15 = 49$. Άρα οι τρόποι επιλογής είναι $64 \cdot 49 = 3,136$. Επειδή δε μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής των τετραγώνων, πρέπει να διαιρέσουμε με το $2! = 2$. Επομένως έχουμε $3,136/2 = 1,568$ επιλογές.

- β) Η λύση αυτού του ερωτήματος είναι εύκολη εάν σκεφτούμε ότι ουσιαστικά πρέπει να επιλέξουμε δύο γραμμές και δύο στήλες της σκακιέρας, αφού οι τομές τους προσδιορίζουν ακριβώς τέσσερα τετράγωνα που σχηματίζουν ένα παραλληλόγραμμο.



Οι τρόποι να επιλέξουμε δύο γραμμές από τις οχτώ είναι $\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!6!} = 28$. Ομοίως και για τις στήλες, επομένως συνολικά έχουμε $28 \cdot 28 = 784$ τρόπους.

Άσκηση 6

Παίζετε το εξής παιχνίδι: Ρίχνετε ένα δίκαιο εξαέδρο ζάρι. Αν έρθει 1, κερδίζετε 8 ευρώ. Αν έρθει 2 ή 3, κερδίζετε 5 ευρώ. Αν έρθει 4, 5 ή 6 χάνετε z ευρώ. Ορίζουμε την τ.μ. X ως το ποσό που κερδίζετε (αρνητικές τιμές για την X υποδηλώνουν το ποσό που χάνετε).

1. Να υπολογιστεί η Συνάρτηση Πιθανότητας της τ.μ. X , $p_X(x)$.
2. Να υπολογιστεί η τιμή του z για την οποία το μέσο κέρδος είναι ίσο με -1 (δηλαδή, εκείνο το z για το οποίο ισχύει: $\mu_X = -1$).

Λύση

1. Το ζάρι είναι δίκαιο, οπότε κάθε αριθμός έχει την ίδια πιθανότητα να εμφανιστεί, ίση με $\frac{1}{6}$. Συνεπώς, έχουμε:

$$p_X(8) = P(X = 8) = P(\{1\}) = \frac{1}{6}$$

$$p_X(5) = P(X = 5) = P(\{2, 3\}) = P(\{2\}) + P(\{3\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

$$p_X(-z) = P(X = -z) = P(\{4, 5, 6\}) = P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

Άρα η συνάρτηση πιθανότητας είναι:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{αν } x = 8 \\ \frac{2}{6}, & \text{αν } x = 5 \\ \frac{3}{6}, & \text{αν } x = -z \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

2. Με βάση τον ορισμό της μέσης τιμής, έχουμε:

$$\mu_X = -1 \Rightarrow \sum_x x p_X(x) = -1 \Rightarrow 8 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + 5 \cdot \left(\frac{2}{6}\right) - z \cdot \left(\frac{3}{6}\right) = -1 \Rightarrow \frac{18 - 3z}{6} = -1 \Rightarrow z = 8.$$

Άσκηση 7

Θεωρείστε την διακριτή τ.μ. X με συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.): $p_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{a} & \text{αν } x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$

- α) Υπολογίστε τη σταθερά a και τη μέση τιμή $E[X]$.
β) Υπολογίστε τη σ.π. της τ.μ. $Z = (X - E[X])^2$.
γ) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του (β), υπολογίστε τη διασπορά της τ.μ. X .

Λύση

- α) Το άθροισμα της συνάρτησης πιθανότητας όλων των πιθανών τιμών ισούται με 1. Επομένως,

$$1 = \sum_{x=-3}^3 p_X(x) = \frac{9}{a} + \frac{4}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{4}{a} + \frac{9}{a} = \frac{28}{a}.$$

Άρα, $a = 28$. Η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$E[X] = \sum_x x p_X(x) = \sum_{x=-3}^3 x \cdot \frac{x^2}{a} = -3 \cdot \frac{9}{a} - 2 \cdot \frac{4}{a} - 1 \cdot \frac{1}{a} + 1 \cdot \frac{1}{a} + 2 \cdot \frac{4}{a} + 3 \cdot \frac{9}{a} = 0.$$

- β) Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις τιμές του Z για ένα δεδομένο X , και την πιθανότητα του γεγονότος αυτού.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$p_X(x)$	9/28	1/7	1/28	0	1/28	1/7	9/28
$Z X=x$	9	4	1	0	1	4	9

Παρατηρούμε ότι το Z μπορεί να πάρει μόνο τρεις τιμές με πιθανότητα μη μηδενική (1, 4, 9). Επιπλέον, κάθε τέτοια τιμή αντιστοιχεί σε δύο τιμές του X . Άρα, έχουμε, για παράδειγμα, $p_Z(9) = P(Z = 9) = P(Z = -3) + P(Z = 3) = p_X(-3) + p_X(3)$. Άρα, η συνάρτηση πιθανότητας της Z είναι:

$$p_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{14}, & \text{αν } z = 1 \\ \frac{2}{7}, & \text{αν } z = 4 \\ \frac{9}{14}, & \text{αν } z = 9 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- γ) Ισχύει ότι: $\text{var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[Z] = 1 \cdot \frac{1}{14} + 4 \cdot \frac{2}{7} + 9 \cdot \frac{9}{14} = 7$.