

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ  
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025  
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

## Άσκηση 1

Στους ζωντανούς οργανισμούς, η γενετική πληροφορία περιέχεται στο DNA. Το DNA είναι ένα πολυμερές, τα μονομερή του οποίου ονομάζονται νουκλεοτίδια. Κάθε νουκλεοτίδιο αποτελείται από μία δεοξυριβόζη η οποία ενώνεται με μία φωσφορική ομάδα και με μία αζωτούχα βάση. Οι αζωτούχες βάσεις είναι οι γνωστές από την βιολογία αδενίνη (A), θυμίνη (T), γουανίνη (G), κυτοσίνη (C) και οι διαφορετικές τους ακολουθίες είναι αυτές που κωδικοποιούν την γενετική πληροφορία.

- α) Πόσες ακολουθίες 6 βάσεων μπορούν να σχηματιστούν?
- β) Βρείτε το πλήθος των ακολουθιών 6 βάσεων που ξεκινάνε ή τελειώνουν με θυμίνη.
- γ) Πόσες ακολουθίες 5 βάσεων υπάρχουν που περιέχουν την τριάδα AUG τουλάχιστον μία φορά?
- δ) Βρείτε την πιθανότητα μία ακολουθία 5 βάσεων να περιέχει την τριάδα AUG.

## Λύση

- α) Μπορούμε να αναπαραστήσουμε την κατασκευή της ακολουθίας ως ένα πείραμα 6 σταδίων, σε κάθε ένα από τα οποία έχουμε 4 διαφορετικές επιλογές, άρα συνολικά υπάρχουν  $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^6 = 4096$  διαφορετικές ακολουθίες 6 βάσεων.
- β) Οι ακολουθίες που ξεκινάνε με T από μόνες τους μπορούν να αναπαρασταθούν ως ένα πείραμα 6 σταδίων όπου το πρώτο στάδιο έχει 1 επιλογή και τα υπόλοιπα στάδια έχουν 4 επιλογές. Επομένως, συνολικά υπάρχουν  $1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$  τέτοιες ακολουθίες. Αυτό είναι προφανώς και το πλήθος των ακολουθιών που τελειώνουν με T. Για να βρούμε τον συνολικό αριθμό δεν μπορούμε απλά να τα προσθέσουμε, διότι οι ακολουθίες οι οποίες έχουν T και στην αρχή και στο τέλος τους θα προσμετρηθούν δύο φορές, άρα πρέπει να αφαιρέσουμε το πλήθος τους μία φορά. Με το ίδιο σκεπτικό όπως και προηγουμένως το πλήθος αυτών είναι  $1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1 = 4^3$ , οπότε εν τέλει το συνολικό πλήθος των ακολουθιών είναι:  $4^5 + 4^5 - 4^3 = 1984$
- γ) Η τριάδα AUG μπορεί να υπάρξει μόνο σε τρεις θέσεις μέσα σε μία ακολουθία 5 βάσεων:  $AUG\_$  ή  $\_AUG\_$  ή  $\_ \_AUG$ . Σε κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις οι ακολουθίες βάσεων είναι  $4^2$ , αφού υπάρχουν 2 ελεύθερες θέσεις στην ακολουθία. Οπότε συνολικά έχουμε  $3 \cdot 4^2 = 48$  διαφορετικές ακολουθίες.
- δ) Αρκεί να βρούμε το συνολικό πλήθος ακολουθιών 5 βάσεων που μπορούν να σχηματιστούν, και να διαιρέσουμε το πλήθος που βρήκαμε στο ερώτημα γ) με αυτό, άρα:

$$P(B_{AUG}) = \frac{48}{4^5} = \frac{48}{1024} \approx 0.046$$

## Άσκηση 2

Το Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών έχει 27 μηχανήματα υπολογιστών στο υπόγειό του για χρήση από τους φοιτητές. Οι υπολογιστές είναι χωρισμένοι σε τρεις αίθουσες. Η πρώτη αίθουσα έχει 10 υπολογιστές, η δεύτερη 8 και η τρίτη 9. Ακόμη, δέκα από τους υπολογιστές είναι συστήματα 32-bit ενώ οι υπόλοιποι 64-bit.

- α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν 27 φοιτητές στα μηχανήματα του Τμήματος αν μπορούν να μετακινήθούν ανάμεσα στις αίθουσες?

Έστω ότι 10 φοιτητές από τους 27 είναι εγγεγραμμένοι στο HY-217.

- β) Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν οι φοιτητές στα μηχανήματα έτσι ώστε όλοι οι φοιτητές του HY-217 να καθίσουν στα συστήματα 32-bit?
- γ) Υπολογίστε την πιθανότητα όλοι οι φοιτητές του HY-217 να έχουν καθίσει σε 32-bit μηχανήματα.
- δ) Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν οι φοιτητές έτσι ώστε κανένας φοιτητής του HY-217 να μην κάθεται σε σύστημα 32-bit? Υπολογίστε την πιθανότητα.

### Λύση

- α) Θέλουμε να βρούμε όλες τις πιθανές μεταθέσεις των 27 φοιτητών, άρα έχουμε  $27! \approx 1.08 \cdot 10^{28}$  διαφορετικούς τρόπους να καθίσουν οι φοιτητές. Εναλλακτικά, σκεφτόμαστε ότι ο πρώτος φοιτητής έχει 27 πιθανές επιλογές, ο δεύτερος 26, ο τρίτος 25 κ.ο.κ, άρα το συνολικό πλήθος τοποθετήσεων είναι το γινόμενο  $27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 27!$
- β) Θεωρούμε ένα πείραμα 2 σταδίων, το πρώτο στάδιο είναι η τοποθέτηση των 10 φοιτητών του HY-217 στους 32-bit υπολογιστές ενώ το δεύτερο στάδιο είναι η τοποθέτηση των 17 υπόλοιπων φοιτητών στους υπόλοιπους υπολογιστές. Το πρώτο στάδιο έχει  $10!$  δυνατά αποτελέσματα ενώ το δεύτερο έχει  $17!$  δυνατά αποτελέσματα, οπότε ο συνολικός αριθμός δυνατών τοποθετήσεων των φοιτητών είναι  $10! \cdot 17! \approx 1.29 \cdot 10^{21}$
- γ) Για να βρούμε την πιθανότητα αρκεί να διαιρέσουμε το πλήθος που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα με το πλήθος όλων των δυνατών τοποθετήσεων, άρα έχουμε

$$P(\Gamma) = \frac{10! \cdot 17!}{27!} \approx 0.0000000118$$

- δ) Για να υπολογίσουμε το πλήθος των τρόπων: Παρατηρούμε ότι το να μην κάθεται κανένας φοιτητής του HY-217 στους 32-bit υπολογιστές σημαίνει πως πάντα θα κάθονται κάποιοι από τους υπόλοιπους φοιτητές, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε το πρώτο στάδιο του πειράματος μας την επιλογή 10 ατόμων από τους υπόλοιπους 17 φοιτητές για να καθίσουν εκείνοι στους 32-bit υπολογιστές. Το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων αυτού του σταδίου θα είναι  $P(17, 10) \approx 7.05 \cdot 10^{10}$ . Το επόμενο στάδιο του πειράματος μας θα είναι η τοποθέτηση των 10 φοιτητών του HY-217 και των 7 φοιτητών που έμειναν από το προηγούμενο βήμα στους υπόλοιπους, μη 32-bit υπολογιστές. Τα δυνατά αποτελέσματα αυτού του σταδίου είναι  $17!$ . Άρα συνολικά έχουμε  $P(17, 10) \cdot 17! \approx 2.5101 \cdot 10^{25}$  δυνατά αποτελέσματα. Έπειτα για την πιθανότητα απλά διαιρούμε με το πλήθος όλων των πιθανών τοποθετήσεων των φοιτητών, άρα:

$$P(\Delta) = \frac{P(17, 10) \cdot 17!}{27!} \approx 0.0023$$

### Άσκηση 3

Το πλήρωμα μίας επανδρωμένης πτήσης στο φεγγάρι για συλλογή πετρωμάτων από τους πόλους αποτελείται από 1 κυβερνήτη, 1 συγκυβερνήτη Α, 1 συγκυβερνήτη Β και 5 γεωλόγους. Για την αποστολή αυτή έχουν εκπαιδευτεί 7 πιλότοι (κυβερνήτες και συγκυβερνήτες) και 10 γεωλόγοι.

- α) Πόσα διαφορετικά πληρώματα μπορούν να σχηματιστούν και γιατί?
- β) Δύο από τους πιθανούς πιλότους είναι αδέρφια. Ποια είναι η πιθανότητα να επιλεγθούν έτσι ώστε η μεγάλη αδερφή να είναι κυβερνήτης και ο μικρός αδερφός συγκυβερνήτης?
- γ) Οι μισοί γεωλόγοι είναι γυναίκες. Υπολογίστε την πιθανότητα να επιλεγθούν όλες τους για την αποστολή.

### Λύση

- α) Παρατηρούμε ότι μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία επιλέγονται οι πιλότοι, αφού κάθε ένας θα έχει διαφορετικό ρόλο, οπότε θέλουμε τον αριθμό των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε 3 άτομα από 7, επομένως υπάρχουν  $P(7, 3) = 210$  τρόποι. Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι δεν μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία επιλέγουμε τους γεωλόγους, αφού έχουν τον ίδιο ρόλο, άρα ψάχνουμε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε 5 άτομα από 10, οπότε έχουμε  $\binom{10}{5} = 252$  τρόπους. Άρα συνολικά θα έχουμε  $210 \cdot 252 = 52.920$  διαφορετικά πληρώματα.

- β) Πρώτα θα υπολογίσουμε όλα τα δυνατά πληρώματα τα οποία μπορούν να σχηματιστούν με αυτό τον περιορισμό και συγκεκριμένα θα εξετάσουμε την επιλογή των πιλότων. Αφού θέλουμε η μεγάλη αδερφή να είναι πάντα κυβερνήτης, θα ασχοληθούμε με τους συγκυβερνήτες. Ο μικρός αδερφός μπορεί να είναι είτε συγκυβερνήτης Α είτε συγκυβερνήτης Β και σε κάθε μία από τις δύο περιπτώσεις για την θέση που έμεινε υπάρχουν 5 επιλογές. Οπότε συνολικά έχουμε  $1 \cdot ((1 \cdot 5) + (1 \cdot 5)) = 10$  διαφορετικές επιλογές για τους πιλότους. Ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να επιλέξουμε τους γεωλόγους θα παραμείνει ο ίδιος, οπότε το συνολικό πλήθος πληρωμάτων θα είναι  $10 \cdot 252 = 2.520$ . Η πιθανότητα του γεγονότος άρα είναι

$$P(\text{Sib}) = \frac{2.520}{52.920} \approx 0.04761$$

- γ) Σε αυτή την περίπτωση το πλήθος των επιλογών των πιλότων θα είναι το ίδιο και μας ενδιαφέρει απλά το πλήθος των επιλογών των γεωλόγων. Δεδομένου ότι δεν μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής τους, ο αριθμός των επιλογών είναι όλοι οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε 5 άτομα από 5 άτομα, δηλαδή  $\binom{5}{5} = 1$  άρα το συνολικό πλήθος πληρωμάτων είναι  $210 \cdot 1 = 210$  και η πιθανότητα είναι:

$$P(\text{Fem}) = \frac{210}{52.920} \approx 0.0039$$

## Άσκηση 4

Ένα μάθημα επιλογής του Τμήματος Επιστήμης Υπολογιστών το παρακολουθούν 4 φοιτητές από το Τμήμα Φυσικής, 10 φοιτητές από το Τμήμα Βιολογίας και 8 φοιτητές από το Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών. Η καθηγήτρια σε κάθε διάλεξη σηκώνει 3 φοιτητές στον πίνακα για να λύσουν ασκήσεις (στην συγκεκριμένη άσκηση δεν μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία τους επιλέγει). Υπολογίστε την πιθανότητα:

- Να σηκώσει δυο φοιτητές από το τμήμα Φυσικής.
- Να σηκώσει έναν φοιτητή από κάθε τμήμα.
- Να σηκώσει τρεις φοιτητές από το ίδιο τμήμα.
- Να μην σηκώσει κανέναν φοιτητή του τμήματος Βιολογίας.
- Να σηκώσει τουλάχιστον έναν φοιτητή του Τμήματος Επιστήμης Υπολογιστών.

## Λύση

Αρχικά υπολογίζουμε το συνολικό πλήθος των τριάδων φοιτητών που μπορεί να σηκώσει στον πίνακα η καθηγήτρια. Παρατηρούμε ότι δεν μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία επιλέγει τους φοιτητές οπότε ψάχνουμε όλες τις διαφορετικές τριάδες 22 ατόμων που μπορούν να φτιάξουμε, το πλήθος των οποίων είναι  $C(22, 3) = \binom{22}{3} = 1.540$

- Θέλουμε από τους 4 φοιτητές φυσικής να επιλέξουμε 2, χωρίς να λάβουμε υπόψιν μας τη σειρά, και από τους υπόλοιπους 20 φοιτητές να επιλέξουμε έναν. Οπότε συνολικά έχουμε  $\binom{4}{2} \cdot \binom{22}{1} = 6 \cdot 22 = 132$  διαφορετικές τριάδες, άρα η πιθανότητα είναι  $P(A) = \frac{132}{1.540} \approx 0.085$
- Για να βρούμε το πλήθος των δυνατών τριάδων αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τα πλήθη των φοιτητών του κάθε τμήματος, το οποίο είναι ισοδύναμο με τον αριθμό των υποσυνόλων που έχουν 1 στοιχείο, άρα έχουμε  $\binom{4}{1} \cdot \binom{10}{1} \cdot \binom{8}{1} = 10 \cdot 4 \cdot 8 = 320$ , άρα  $P(B) = \frac{320}{1.540} \approx 0.207$ .
- Υπάρχουν τρεις διαφορετικές εκδοχές, να διαλέξει 3 άτομα από το Φυσικό ή να διαλέξει 3 άτομα από το Βιολογικό ή να διαλέξει 3 άτομα από το Επιστήμης Υπολογιστών, άρα ο συνολικός αριθμός τριάδων που μπορούν να σχηματιστούν είναι  $C(4, 3) + C(10, 3) + C(8, 3) = \binom{4}{3} + \binom{10}{3} + \binom{8}{3} = 180$  και άρα η πιθανότητα είναι  $P(\Gamma) = \frac{180}{1.540} \approx 0.116$
- Από τους 22 φοιτητές που παρακολουθούν το μάθημα 12 δεν είναι από το τμήμα Βιολογίας. Οπότε αρκεί να βρούμε πόσες τριάδες μπορούν να σχηματιστούν από 12 άτομα, οπότε έχουμε  $C(12, 3) = \binom{12}{3} = 220$  και η πιθανότητα είναι:  $P(\Gamma) = \frac{220}{1.540} \approx 0.142$ .
- Συμφέρει να υπολογίσουμε την πιθανότητα να συμβεί το συμπληρωματικό γεγονός. Το συμπληρωματικό γεγονός του να σηκώσει τουλάχιστον έναν φοιτητή του Επιστήμης Υπολογιστών είναι το να μην σηκώσει κανέναν φοιτητή, οπότε ακολουθούμε το σκεπτικό του ερωτήματος δ). Οι δυνατές τριάδες είναι  $C(14, 3) = 364$ , οπότε η πιθανότητα είναι  $P(E^c) = \frac{364}{1.540} \approx 0.236$ , άρα η πιθανότητα που θέλουμε είναι  $P(E) = 1 - P(E^c) \approx 0.764$

## Άσκηση 5

Υπολογίστε την πιθανότητα ένας αναγραμματισμός της λέξης AARDVARK να έχει τα A σε διαδοχικές θέσεις. Έπειτα υπολογίστε το ίδιο για τα Σ στη λέξη ΘΑΛΑΣΣΙΑΣ.

### Λύση

- Πρώτα θέλουμε όλους τους πιθανούς αναγραμματισμούς της λέξης AARDVARK. Παρατηρούμε ότι η λέξη έχει 3 A, 2 R και 1 από κάθε άλλο γράμμα και 8 γράμματα συνολικά, άρα το πλήθος των πιθανών αναγραμματισμών είναι:

$$\frac{8!}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 2!} = 3360$$

Και μετά θέλουμε το πλήθος όλων των δυνατών αναγραμματισμών που περιέχουν 3 διαδοχικά A. Ένας τρόπος για να βρεθεί το πλήθος αυτό είναι να θεωρήσουμε ότι η ακολουθία AAA είναι ένα μεγάλο "γράμμα" από μόνο του, και έπειτα να υπολογίσουμε όλους τους δυνατούς αναγραμματισμούς αυτής της καινούριας "λέξης" 6 γραμμάτων, η οποία έχει 2 R και 1 από τα υπόλοιπα γράμματα μαζί με το "AAA". Άρα συνολικά υπάρχουν:

$$\frac{6!}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2!} = 360$$

Εναλλακτικά μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα 3 διαδοχικά A είναι ήδη σε μία θέση στη λέξη και να υπολογίσουμε τους αναγραμματισμούς των υπόλοιπων γραμμάτων. Στη μεμονωμένη αυτή περίπτωση το πλήθος των αναγραμματισμών(δεδομένων των 2 R) είναι:

$$\frac{5!}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2!} = 60$$

Βλέπουμε ότι τα 3 διαδοχικά A μπορούν να υπάρξουν μόνο σε 6 θέσεις μέσα στη λέξη, και έχουμε 60 αναγραμματισμούς για κάθε μία από αυτές, άρα συνολικά υπάρχουν  $60 \cdot 6 = 360$  τέτοιοι αναγραμματισμοί. Άρα εν τέλει η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(AAA) = \frac{360}{3360} \approx 0.107$$

- Ομοίως με το προηγούμενο ερώτημα, το πλήθος των δυνατών αναγραμματισμών της λέξης ΘΑΛΑΣΣΙΑΣ είναι:(δεδομένων των τριών A και τριών Σ)

$$\frac{9!}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 3!} = 10.080$$

Θεωρώντας πάλι πως τα τρία διαδοχικά Σ είναι ένα σύμβολο, οι δυνατοί αναγραμματισμοί των συμβόλων αυτών είναι:

$$\frac{6!}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 3!} = 120$$

Και άρα η πιθανότητα είναι:

$$P(\Sigma\Sigma\Sigma) = \frac{120}{10.080} \approx 0.011$$

## Άσκηση 6

Ρίχνουμε 2 τρίεδρα δίκαια ζάρια. Ορίζουμε την τ.μ. X ως το άθροισμα των τιμών τους.

- Υπολογίστε την συνάρτηση μάζας πιθανότητας  $p_X(x)$  και την μέση τιμή  $E[X]$  της τυχαίας μεταβλητής X.
- Σε ένα παιχνίδι τύχης πληρώνετε k ευρώ για το δικαίωμα να ρίξετε μία φορά τα ζάρια και κερδίζετε πέντε φορές το άθροισμα των ζαριών. Από ποια τιμή του k και πάνω το παιχνίδι αυτό θα είναι ισορροπημένο, δηλαδή θα κερδίζετε κατά μέσο όρο όσα χρήματα πληρώσετε?

### Λύσεις

- Ο δειγματοχώρος του πειράματος είναι ο:

$$\Omega = \{(i, j) | i, j \in \{1, 2, 3\}\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), \}$$

Άρα οι τιμές της τ.μ X είναι οι:

| (i, j) | X |
|--------|---|
| (1, 1) | 2 |
| (1, 2) | 3 |
| (1, 3) | 4 |
| (2, 1) | 3 |
| (2, 2) | 4 |
| (2, 3) | 5 |
| (3, 1) | 4 |
| (3, 2) | 5 |
| (3, 3) | 6 |

Δεδομένου ότι η πιθανότητα κάθε γεγονότος είναι η ίδια, δηλαδή  $\frac{1}{9}$ , η  $p_X(x)$  θα είναι:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}, & X = 2 \\ \frac{2}{9}, & X = 3 \\ \frac{3}{9}, & X = 4 \\ \frac{2}{9}, & X = 5 \\ \frac{1}{9}, & X = 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Η μέση τιμή της X,  $E[X]$  είναι η:

$$E[X] = \frac{1}{9} \cdot 2 + \frac{2}{9} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{2}{9} \cdot 5 + \frac{1}{9} \cdot 6 = 4.$$

- β) Ξέρουμε ότι πληρώνουμε k ευρώ για κάθε ρίψη των ζαριών και κερδίζουμε  $5 \cdot X$  ευρώ. Θέλουμε κατά μέσο όρο η διαφορά των χρημάτων που πληρώνουμε με τα χρήματα που κερδίζουμε να είναι 0. Δηλαδή θέλουμε η τ.μ.  $Y = 5X - k$  να είναι 0 κατά μέσο όρο, άρα είναι:

$$E[Y] = 0 \Rightarrow E[5X - k] = 0 \Rightarrow E[5X] - k = 0 \Rightarrow E[5X] = k \Rightarrow 5 \cdot E[X] = k \Rightarrow k = 20.$$

Άρα πρέπει σε κάθε ρίψη να πληρώνουμε 20 ευρώ ώστε κατά μέσο όρο να κερδίζουμε τόσα χρήματα όσα θα δώσουμε.

## Άσκηση 7

Ένα δοχείο περιέχει 20 μπάλες αριθμημένες από το ένα μέχρι το είκοσι. Από το δοχείο αυτό επιλέγουμε ισοπίθανα χωρίς επαναποποθέτηση τρεις μπάλες και ορίζουμε την τ.μ. X ως τον μεγαλύτερο από τους αριθμούς που έχουν επιλεγεί.

- α) Ποιο είναι το πεδίο τιμών της τ.μ. X? Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας.  
β) Αν στοιχηματίσουμε ότι μία τουλάχιστον από τις 3 μπάλες θα φέρει αριθμό μεγαλύτερο ή ίσο από 17, ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσουμε το στοίχημα?

## Λύση

- α) Το πεδίο τιμών της X είναι οι αριθμοί 3, 4, 5, ..., 20, αφού όταν επιλέξουμε τρεις μπάλες, οι μπάλες με τιμές 1, 2 ποτέ δεν θα έχουν τον μεγαλύτερο αριθμό στην τριάδα.  
Για τον υπολογισμό της συνάρτησης πιθανότητας της X, παρατηρούμε ότι ο δειγματοχώρος του πειράματος έχει  $\binom{20}{3}$  γεγονότα. Επίσης ξέρουμε ότι  $p_X(k) = P(X = k)$ . Το γεγονός  $\{X = k\}$  είναι όλες οι τριάδες αριθμών για τις οποίες το k είναι ο μεγαλύτερος αριθμός. Αυτό σημαίνει πως οι άλλοι δύο αριθμοί θα είναι πάντα μικρότεροι του k. Οπότε ο αριθμός των στοιχείων αυτού του γεγονότος είναι  $\binom{1}{1} \cdot \binom{k-1}{2}$ , αφού η μία από τις επιλογές θα είναι πάντα το k. Άρα η συνάρτηση πιθανότητας είναι ή:

$$p_X(k) = \frac{\binom{k-1}{2}}{\binom{20}{3}}, k = 3, 4, \dots, 20$$

- β) Θέλουμε την πιθανότητα του γεγονότος  $\{X \geq 17\}$ . Παρατηρούμε ότι τα γεγονότα  $X = k$  είναι ξένα μεταξύ τους, οπότε:

$$\{X \geq 17\} = \bigcup_{i=17}^{20} \{X = i\} \Rightarrow P(X \geq 17) = \sum_{i=17}^{20} P(X = i)$$

Δηλαδή η πιθανότητα είναι η:

$$P(X \geq 17) = p_X(17) + p_X(18) + p_X(19) + p_X(20) \approx 0.105 + 0.119 + 0.134 + 0.15 \approx 0.508$$