

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1

Το πρόβλημα αυτό εξετάζει εξετάζει την κατανόησή σας για την έννοια της ανεξαρτησίας. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το μέρος (α) για να απαντήσετε το (γ).

- α) Αποδείξτε την ακόλουθη πρόταση: Αν τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα και $B \subset A$, τότε $P(A) = 1$ ή $P(B) = 0$.
- β) Ρίχνετε ένα δίκαιο κέρμα n φορές. Έστω $n = 3$. Ορίζουμε τα γεγονότα: $A = \{\text{έρχονται τουλάχιστον 2 γράμματα}\}$ και $B = \{\text{έρχονται μία ή δύο κεφαλές}\}$. Είναι τα A και B ανεξάρτητα;
- γ) Επαναλάβετε το μέρος (β) για $n = 4$.

Λύση

(α) Καθώς τα A και B είναι ανεξάρτητα, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Επίσης, αφού το B είναι υποσύνολο του A , $P(A \cap B) = P(B)$. Επομένως, $P(B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(B) - P(A)P(B) = 0 \Leftrightarrow P(B)(1 - P(A)) = 0$ και συνεπώς $P(B) = 0$ ή $P(A) = 1$.

(β) Ο δειγματοχώρος αυτού του πειράματος τύχης είναι:

$$\Omega = \{ KKK, KKG, KKK, KGG, GKK, GK, GKG, GGG \}$$

Το γεγονός A είναι:

$$A = \{ KGG, GKG, GKK, GGG \}$$

με $P(A) = \frac{4}{8}$, ενώ το B είναι:

$$B = \{ KKG, KKK, KGG, GKK, GK, GKG \}$$

με $P(B) = \frac{6}{8}$. Η τομή των A και B είναι το γεγονός 'ακριβώς μία κεφαλή':

$$A \cap B = \{ KGG, GK, GKG \}$$

με $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$. Καθώς, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα.

Εδώ για να βρείτε πιο εύκολα την τομή των A και B θα μπορούσατε να παρατηρήσετε ότι

$$A = \{ \text{Έρχονται τουλάχιστον δύο γράμματα} \} = \{ \text{Έρχεται το πολύ μία κεφαλή} \}$$

και αφού

$$B = \{ \text{Έρχονται μία ή δύο κεφαλές} \}$$

μπορείτε εύκολα να αναγνωρίσετε πλέον ότι

$$A \cap B = \{ \text{Έρχεται ακριβώς μία κεφαλή} \}$$

(γ) Και πάλι

$$A = \{ \text{Έρχονται τουλάχιστον δύο γράμματα} \} = \{ \text{Έρχονται το πολύ δύο κεφαλές} \} \\ = \{ KKG, GKK, GKG, KGG, GKK, GK, GKG, GGG \}$$

$$B = \{ \text{Έρχονται μία ή δύο κεφαλές} \} = \{ KKG, GKK, GKG, KGG, GKK, GK, GKG, GGG \}$$

Σε αυτήν την περίπτωση μπορείτε να παρατηρήσετε ότι $B \subset A$, αφού περιέχει όλα τα στοιχεία που υπάρχουν και στο A , εκτός του GGG . Αν τα A και B ήταν ανεξάρτητα τότε από (α) θα έπρεπε να ισχύει: $P(A) = 1$ ή $P(B) = 0$. Αλλά προφανώς $P(B) > 0$, αφού π.χ. περιέχει το ενδεχόμενο KKG και $P(A) < 1$, αφού π.χ. δεν περιέχει το ενδεχόμενο $KKKK$. Άρα τα A και B δεν είναι ανεξάρτητα.

(β) Ο δειγματοχώρος αυτού του πειράματος τύχης είναι:

$$\Omega = \{ KKK, KKG, KKK, KGG, GKK, GK, GKG, GGG \}$$

Το γεγονός A είναι:

$$A = \{ KGG, GKG, GKK, GGG \}$$

με $P(A) = \frac{4}{8}$, ενώ το B είναι:

$$B = \{ \text{ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ} \}$$

με $P(B) = \frac{6}{8}$. Η τομή των A και B είναι το γεγονός 'ακριβώς μία κεφαλή':

$$A \cap B = \{ \text{ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΚ} \}$$

με $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$. Καθώς, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα.

Εδώ για να βρείτε πιο εύκολα την τομή των A και B θα μπορούσατε να παρατηρήσετε ότι

$$A = \{ \text{'Ερχονται τουλάχιστον δύο γράμματα} \} = \{ \text{'Ερχεται το πολύ μία κεφαλή} \}$$

και αφού

$$B = \{ \text{'Ερχονται μία ή δύο κεφαλές} \}$$

μπορείτε εύκολα να αναγνωρίσετε πλέον ότι

$$A \cap B = \{ \text{'Ερχεται ακριβώς μία κεφαλή} \}$$

(γ) Και πάλι

$$\begin{aligned} A &= \{ \text{'Ερχονται τουλάχιστον δύο γράμματα} \} = \{ \text{'Ερχονται το πολύ δύο κεφαλές} \} \\ &= \{ \text{ΚΚΓΓ, ΓΚΚΓ, ΓΓΚΚ, ΚΓΓΚ, ΓΓΓΓ, ΚΓΓΓ, ΓΚΓΓ, ΓΓΚΓ, ΓΓΓΚ} \} \end{aligned}$$

$$B = \{ \text{'Ερχονται μία ή δύο κεφαλές} \} = \{ \text{ΚΚΓΓ, ΓΚΚΓ, ΓΓΚΚ, ΚΓΓΚ, ΚΓΓΓ, ΓΚΓΓ, ΓΓΚΓ, ΓΓΓΚ} \}$$

Σε αυτήν την περίπτωση μπορείτε να παρατηρήσετε ότι $B \subset A$, αφού περιέχει όλα τα στοιχεία που υπάρχουν και στο A , εκτός του ΓΓΓΓ. Αν τα A και B ήταν ανεξάρτητα τότε από (α) θα έπρεπε να ισχύει: $P(A) = 1$ ή $P(B) = 0$. Αλλά προφανώς $P(B) > 0$, αφού π.χ. περιέχει το ενδεχόμενο ΚΚΓΓ και $P(A) < 1$, αφού π.χ. δεν περιέχει το ενδεχόμενο ΚΚΚΚ. Άρα τα A και B δεν είναι ανεξάρτητα.

Άσκηση 2

Υπάρχουν τρία κουτιά, το καθένα με ένα συρτάρι σε κάθε μία από τις δύο πλευρές. Κάθε συρτάρι περιέχει ένα νόμισμα (άρα δύο νομίσματα σε κάθε κουτί). Ένα κουτί περιέχει ένα χρυσό νόμισμα σε κάθε πλευρά (GG), ένα άλλο περιέχει ένα ασημένιο νόμισμα σε κάθε πλευρά (SS), και το τρίτο περιέχει ένα χρυσό νόμισμα στη μία πλευρά και ένα ασημένιο στην άλλη (GS). Επιλέγουμε τυχαία ένα κουτί, ανοίγουμε τυχαία ένα συρτάρι, και βρίσκουμε μέσα ένα χρυσό νόμισμα. Ποια είναι η πιθανότητα το νόμισμα στην άλλη πλευρά να είναι επίσης χρυσό;

Λύση

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα να είναι το νόμισμα στην άλλη πλευρά χρυσό, πρέπει να εφαρμόσουμε τον Θεώρημα του Bayes. Έστω τα εξής ενδεχόμενα:

- A : {Το επιλεγμένο κουτί είναι το κουτί με δύο χρυσά νομίσματα (GG)}
- B : {Το επιλεγμένο κουτί είναι το κουτί με ένα χρυσό και ένα ασημένιο νόμισμα (GS)}
- C : {Το επιλεγμένο κουτί είναι το κουτί με δύο ασημένια νομίσματα (SS)}

Οι πιθανότητες να επιλέξουμε το κουτί A , B , ή C είναι αρχικά ίσες, δηλαδή $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$.

Ωστόσο, η πληροφορία ότι βρήκαμε χρυσό νόμισμα αλλάζει τις πιθανότητες. Χρησιμοποιούμε τον Θεώρημα του Bayes για να υπολογίσουμε την ενημερωμένη πιθανότητα ότι επιλέξαμε το κουτί A , δεδομένου ότι βρήκαμε χρυσό νόμισμα.

Έστω G το ενδεχόμενο ότι βρήκαμε χρυσό νόμισμα. Θέλουμε να βρούμε $P(A|G)$, δηλαδή την πιθανότητα να είναι το κουτί A δεδομένου ότι βρήκαμε χρυσό νόμισμα:

$$P(A|G) = \frac{P(G|A)P(A)}{P(G)}$$

Γνωρίζουμε ότι:

- $P(G|A) = 1$ διότι αν επιλέξουμε το κουτί με τα δύο χρυσά νομίσματα, πάντα θα βρούμε χρυσό.
- $P(G|B) = \frac{1}{2}$ διότι αν επιλέξουμε το κουτί με το ένα χρυσό και ένα ασημένιο νόμισμα, έχουμε 50% πιθανότητα να βρούμε χρυσό.
- $P(G|C) = 0$ διότι αν ανοίξουμε το κουτί με τα ασημένια νομίσματα έχουμε 0 πιθανότητα να βρούμε χρυσό.
- $P(G) = P(G|A)P(A) + P(G|B)P(B) + P(G|C)P(C) = 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

Τώρα, μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα:

$$P(A|G) = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Επομένως, η πιθανότητα το νόμισμα στην άλλη πλευρά να είναι επίσης χρυσό είναι $\frac{2}{3}$.

Άσκηση 3

Ένας πεζός στο Ηράκλειο αποφασίζει να διασχίσει το δρόμο αλλά φοβάται μήπως τον πατήσουν τα αυτοκίνητα. Ρίχνει ένα δίκαιο κέρμα για να αποφασίσει. Αν έρθει γράμματα, δεν διασχίζει το δρόμο. Αν έρθει κορώνα, επειδή είναι πολύ φοβισμένος, αποφασίζει να ρίξει το κέρμα άλλες 2 φορές. Αν οι επόμενες 2 ρίψεις είναι και αυτές κορώνα, τότε διασχίζει το δρόμο. Αν όχι, θα μείνει ακίνητος στην άκρη του δρόμου.

- (α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ο πεζός δεν θα διασχίσει το δρόμο.
- (β) Με δεδομένο ότι ο πεζός δεν διασχίζει το δρόμο, υπολογίστε την πιθανότητα ότι η πρώτη ρίψη του κέρματος έφερε γράμματα.
- (γ) Με δεδομένο ότι ο πεζός δεν διασχίζει το δρόμο, υπολογίστε την πιθανότητα ότι η πρώτη ρίψη του κέρματος έφερε κορώνα.

Λύση

(α) Για $i = 1, 2, 3$ ορίζουμε τα γεγονότα

$$K_i = \{ \text{Η } i\text{-στή ρίψη είναι κεφαλή} \}$$
$$\Gamma_i = \{ \text{Η } i\text{-στή ρίψη είναι γράμματα} \}$$

Ακόμα, ορίζουμε το γεγονός,

$$\Delta = \{ \text{Ο πεζός δε διασχίζει το δρόμο} \}$$

Τότε, $P(\Delta) = P((K_1 K_2 K_3)^c) = 1 - P(K_1 K_2 K_3) = 1 - P(K_1)P(K_2)P(K_3) = 1 - (\frac{1}{2})^3 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

Όπου $P(K_1 K_2 K_3) = P(K_1)P(K_2)P(K_3)$ ισχύει διότι οι 3 ρίψεις του νομίσματος είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες.

(β)

$$P(\Gamma_1 | \Delta) = \frac{P(\Gamma_1 \cap \Delta)}{P(\Delta)} = \frac{P(\Gamma_1)}{P(\Delta)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{8}} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$

Όπου $P(\Gamma_1 \cap \Delta) = P(\Gamma_1)$ ισχύει διότι $\Gamma_1 \subset \Delta$.

(γ) $P(K_1 | \Delta) = 1 - P(K_1^c | \Delta) = 1 - P(\Gamma_1 | \Delta) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$

Όπου $P(K_1^c | \Delta) = P(\Gamma_1 | \Delta)$ ισχύει διότι $K_1^c = \Gamma_1$.

Άσκηση 4

Ρίχνουμε ανεξάρτητα δύο δίκαια εξαέδρα ζάρια. Ορίζουμε τα γεγονότα:

$A = \{ \text{Το πρώτο ζάρι φέρνει: } 1, 2, \text{ ή } 3 \}, B = \{ \text{Το δεύτερο ζάρι φέρνει: } 2, 3, \text{ ή } 6 \},$ και

$C = \{ \text{Το άθροισμα των δύο ρίψεων} = 9 \}.$

(α) Δείξτε ότι $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$;

(β) Είναι τα $A, B,$ και C ανεξάρτητα;

Λύση

(α) Επειδή τα ζάρια είναι δίκαια και τα πειράματα εκτελούνται ανεξάρτητα, η πιθανότητα να προκύψει οποιοδήποτε ζευγάρι είναι $1/36$, και

$$P(A) = 18/36 = 1/2, \quad P(B) = 18/36 = 1/2, \quad P(C) = 4/36 = 1/9$$

καθώς $A \cap B \cap C = \{(3, 6)\}, P(A \cap B \cap C) = 1/36 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{9} = P(A)P(B)P(C).$

(β) Ισχύει

$$A \cap C = \{(3, 3)\}$$

Συνεπώς:

$$P(A \cap C) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{2} \frac{1}{9} = P(A)P(C)$$

άρα τα $A, B,$ και C δεν είναι ανεξάρτητα.

Άσκηση 5

Το δίκαιο εξάδρο ζάρι A έχει 5 πράσινες όψεις και μία κόκκινη. Το δίκαιο εξάδρο ζάρι B έχει 3 πράσινες όψεις και 3 κόκκινες. Ρίχνουμε ένα δίκαιο κέρμα. Αν έρθει κεφαλή, το παιχνίδι συνεχίζεται ρίχνοντας *μόνο* το ζάρι A, αλλιώς, αν έρθουν γράμματα, το παιχνίδι συνεχίζεται ρίχνοντας *μόνο* το ζάρι B.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι η n -στη ρίψη του ζαριού φέρνει πράσινο.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι τόσο η n -στη όσο και η $(n+1)$ -στη ρίψη του ζαριού φέρνουν πράσινο.

(γ) Αν έρθει πράσινο κατά τις n πρώτες ρίψεις, υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα ότι η $(n+1)$ -στη ρίψη θα φέρει πράσινο. Τι γίνεται καθώς το n τίνει στο άπειρο; Δώστε μία εξήγηση για το αποτέλεσμα.

Λύση

(α) Έστω A το ενδεχόμενο να έρθει κεφαλή (οπότε παίζουμε με το ζάρι A) και B το ενδεχόμενο να έρθουν γράμματα (οπότε παίζουμε με το ζάρι B). Έστω επίσης O_n το ενδεχόμενο η n -οστή ρίψη να φέρει πράσινο. Εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας:

$$P(O_n) = P(O_n|A)P(A) + P(O_n|B)P(B).$$

Για το ζάρι A, η πιθανότητα να φέρει πράσινο είναι $P(O_n|A) = 5/6$, ενώ για το ζάρι B, η πιθανότητα να φέρει πράσινο είναι $P(O_n|B) = 1/2$. Επιπλέον, $P(A) = P(B) = 1/2$. Έτσι, έχουμε:

$$P(O_n) = \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{12} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

(β) Κάνοντας ξανά χρήση του θεωρήματος ολικής πιθανότητας, έχουμε:

$$P(O_n \cap O_{n+1}) = \frac{1}{2}P((O_n \cap O_{n+1})|A) + \frac{1}{2}P((O_n \cap O_{n+1})|B).$$

Για το ζάρι A, η πιθανότητα να φέρουν και οι δύο ρίψεις πράσινο είναι $\left(\frac{5}{6}\right)^2$, ενώ για το ζάρι B, είναι $\left(\frac{1}{2}\right)^2$. Αυτό συμβαίνει διότι, δεδομένου του γεγονότος A, τα O_n είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητα. Ομοίως, δεδομένου του γεγονότος B, τα O_n είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητα. Άρα:

$$P(O_n \cap O_{n+1}) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{25}{36} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{25}{36} + \frac{9}{36}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{34}{36} = \frac{17}{36}.$$

(γ) Έστω F_n το ενδεχόμενο οι πρώτες n ρίψεις να φέρουν πράσινο. Η δεσμευμένη πιθανότητα ότι η $n+1$ -οστή ρίψη θα φέρει πράσινο, δεδομένου ότι οι πρώτες n ρίψεις έφεραν πράσινο, είναι:

$$P(O_{n+1}|F_n) = \frac{P(O_{n+1} \cap F_n)}{P(F_n)} = \frac{P(F_{n+1})}{P(F_n)}.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας:

$$P(O_{n+1}|F_n) = \frac{(1/2)P(F_{n+1}|A) + (1/2)P(F_{n+1}|B)}{(1/2)P(F_n|A) + (1/2)P(F_n|B)} = \frac{(5/6)^{n+1} + (1/2)^{n+1}}{(5/6)^n + (1/2)^n}.$$

Για μεγάλα n , το $(5/6)^n$ γίνεται πολύ μεγαλύτερο από το $(1/2)^n$, επομένως το $P(O_{n+1}|F_n)$ προσεγγίζει το:

$$\frac{(5/6)^{n+1}}{(5/6)^n} = \frac{5}{6}.$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι λογικό: όσο περισσότερες φορές εμφανίζεται το πράσινο, τόσο πιο πιθανό είναι ότι έχει επιλεγεί το ζάρι A, το οποίο με πιθανότητα $5/6$ φέρνει πράσινο.

Επίσης, παρατηρήστε τη συμπεριφορά του $P(A|F_n)$ καθώς το $n \rightarrow \infty$. Με εφαρμογή των θεωρημάτων του Bayes και της ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$P(A|F_n) = \frac{P(F_n|A)P(A)}{P(F_n)} = \frac{P(F_n|A)P(A)}{P(F_n|A)P(A) + P(F_n|B)P(B)}.$$

Άρα:

$$P(A|F_n) = \frac{(5/6)^n(1/2)}{(5/6)^n(1/2) + (1/2)^n(1/2)} = \frac{(5/6)^n}{(5/6)^n + (1/2)^n} = \frac{1}{1 + (6/10)^n}.$$

Καθώς το n τείνει στο άπειρο, η δεσμευμένη πιθανότητα $P(A|F_n)$ τείνει στη μονάδα: Αν όλες οι ρίψεις φέρνουν πράσινο, σχεδόν σίγουρα ρίχνουμε το ζάρι A που έχει 5 στις 6 όψεις πράσινες.

Άσκηση 6

Μας δίνονται 2 πειραγμένα νομίσματα εκ των οποίων το ένα φέρνει κεφαλή με πιθανότητα $1/3$ και το άλλο φέρνει κεφαλή με πιθανότητα $2/3$. Τα δύο νομίσματα φαίνονται να είναι πανομοιότυπα: δεν μπορούμε να τα ξεχωρίσουμε εξ όψεως. Ρίχνουμε τα δύο νομίσματα από μία φορά το καθένα διαλέγοντας στην τύχη (με πιθανότητα $1/2$) ποιο θα ρίξουμε πρώτο. Ορίζουμε τα γεγονότα $H_i = \{\text{η } i\text{-στή ρίψη φέρνει κεφαλή}\}$, $i = 1, 2$.

(α) Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(H_1)$ και $P(H_2)$.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι και οι δύο ρίψεις φέρνουν κεφαλή, δηλαδή $P(H_1 \cap H_2)$.

(γ) Είναι τα γεγονότα H_1 και H_2 ανεξάρτητα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση

(α) Ορίζουμε το γεγονός $A = \{\text{το κέρμα με πιθανότητα κεφαλής } 1/3 \text{ ρίχνεται πρώτο}\}$.

Προφανώς, $A^c = \{\text{το κέρμα με πιθανότητα κεφαλής } 2/3 \text{ ρίχνεται πρώτο}\}$. Χρησιμοποιώντας αυτή τη διαμέριση του δειγματοχώρου, εφαρμόζουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας:

$$P(H_1) = P(A)P(H_1|A) + P(A^c)P(H_1|A^c) = \frac{1}{2} \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$

Ομοίως:

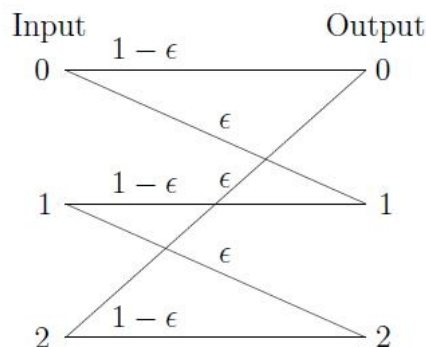
$$P(H_2) = P(A)P(H_2|A) + P(A^c)P(H_2|A^c) = \frac{1}{2} \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

(β) Ομοίως, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(H_1 \cap H_2) &= P(A)P(H_1 \cap H_2|A) + P(A^c)P(H_1 \cap H_2|A^c) \\ &= P(A)P(H_1|A)P(H_2|A) + P(A^c)P(H_1|A^c)P(H_2|A^c) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{2}{3} = \frac{2}{9}. \end{aligned} \quad (1)$$

(γ) Από τα (α) και (β) έχουμε ότι $P(H_1 \cap H_2) = \frac{2}{9} \neq \frac{1}{2} \frac{1}{2} = P(H_1)P(H_2)$. Συνεπώς, τα γεγονότα H_1 και H_2 δεν είναι ανεξάρτητα, αν και είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητα δεδομένου του A .

Άσκηση 7



Το διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης για ένα τριαδικό κανάλι επικοινωνίας φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Υποθέστε ότι τα σύμβολα 0, 1 και 2 στέλνονται με πιθανότητες $1/2$, $1/4$ και $1/4$, αντίστοιχα.

(α) Βρείτε τις πιθανότητες λήψης των συμβόλων 0, 1 και 2.

(β) Δεδομένου ότι λαμβάνεται 1, βρείτε τις πιθανότητες να εστάλη 0, 1 ή 2. Να απαντήσετε συναρτήσει του όρου ϵ (πιθανότητα λάθους).

Λύση

Ορίζουμε τα εξής γεγονότα που σχετίζονται με το πρόβλημα του τριαδικού καναλιού: $A_i = \{\text{Μεταδίδεται το σύμβολο } i\}$ και $B_i = \{\text{Λαμβάνεται το σύμβολο } i\}$. Από την εκφώνηση, έχουμε ότι $P(A_0) = 1/2$, $P(A_1) = 1/4$ και $P(A_2) = 1/4$.

(α) Για να βρούμε τις πιθανότητες των B_i , χρησιμοποιούμε το νόμο της ολικής πιθανότητας

$$\begin{aligned} P(B_0) &= P(B_0|A_0)P(A_0) + P(B_0|A_1)P(A_1) + P(B_0|A_2)P(A_2) \\ &= (1 - \epsilon)\frac{1}{2} + 0\frac{1}{4} + \epsilon\frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\epsilon, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_1) &= P(B_1|A_0)P(A_0) + P(B_1|A_1)P(A_1) + P(B_1|A_2)P(A_2) \\ &= \epsilon\frac{1}{2} + (1 - \epsilon)\frac{1}{4} + 0\frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\epsilon, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_2|A_0)P(A_0) + P(B_2|A_1)P(A_1) + P(B_2|A_2)P(A_2) \\ &= 0\frac{1}{2} + \epsilon\frac{1}{4} + (1 - \epsilon)\frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Όπως είναι αναμενόμενο, το άθροισμα των $P(B_i)$ είναι 1.

(β) Οι δεσμευμένες πιθανότητες $P(A_i|B_1)$ υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Bayes:

$$\begin{aligned} P(A_0|B_1) &= \frac{P(A_0)P(B_1|A_0)}{P(B_1)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\epsilon}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\epsilon} \\ &= \frac{2\epsilon}{1 + \epsilon}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_1|B_1) &= \frac{P(A_1)P(B_1|A_1)}{P(B_1)} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(1 - \epsilon)}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\epsilon} \\ &= \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_2|B_1) &= \frac{P(A_2)P(B_1|A_2)}{P(B_1)} \\ &= \frac{\frac{1}{4}0}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\epsilon} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ξανά παρατηρούμε ότι το άθροισμα των παραπάνω πιθανοτήτων είναι 1 (όπως είναι αναμενόμενο).