

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2025-2026

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1

Έστω τα ενδεχόμενα A και B με $P(A) = x$, $P(B) = y$ και $P(A \cup B) = z$. Υπολογίστε τις ακόλουθες πιθανότητες:

(α) $P(A \cap B)$

(β) $P(A^c \cap B^c)$

(γ) $P(A^c \cup B^c)$

(δ) $P(A \cap B^c)$

(ε) $P(A^c \cup B)$

Λύση

(α) Γνωρίζουμε ότι: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow z = x + y - P(A \cap B)$

Άρα, $P(A \cap B) = x + y - z$

(β)

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= 1 - P((A^c \cap B^c)^c) \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - z \end{aligned}$$

(γ)

$$\begin{aligned} P(A^c \cup B^c) &= 1 - P((A^c \cup B^c)^c) \\ &= 1 - P(A \cap B) \\ &= 1 - (x + y - z) = 1 - x - y + z \end{aligned}$$

(δ)

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= x - (x + y - z) = z - y \end{aligned}$$

(ε)

$$\begin{aligned} P(A^c \cup B) &= 1 - P((A^c \cup B)^c) \\ &= 1 - P(A \cap B^c) \\ &= 1 - (z - y) = 1 - z + y \end{aligned}$$

Άσκηση 2

Υπολογίστε την πιθανότητα $P(A \cup (B^c \cup C^c)^c)$ για τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

(α) Τα A, B, C είναι ξένα μεταξύ τους και $P(A) = \frac{3}{7}$.

(β) $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B \cap C) = \frac{1}{3}$ και $P(A \cap C) = 0$.

(γ) $P(A^c \cap (B^c \cup C^c)) = 0.65$.

Λύση

(α) Δίνεται ότι $P(A) = 3/7$ και ότι τα ενδεχόμενα A, B, C είναι ξένα μεταξύ τους. Οπότε, θα ισχύει:

$$A \cap B = \emptyset, \quad A \cap C = \emptyset, \quad B \cap C = \emptyset, \quad A \cap B \cap C = \emptyset.$$

Χρησιμοποιώντας τους κανόνες *DeMorgan* ξέρουμε ότι $(B^c \cup C^c)^c = B \cap C$. Οπότε

$$\begin{aligned} P(A \cup (B^c \cup C^c)^c) &= P(A \cup (B \cap C)) \\ &= P(A) + P(B \cap C) - P(A \cap (B \cap C)) \\ &= P(A) + P(\emptyset) - P(\emptyset) \\ &= P(A) = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

(β) Δίνεται ότι $P(A) = 1/2$, $P(B \cap C) = 1/3$ και $P(A \cap C) = 0$. Εφαρμόζοντας τους κανόνες *DeMorgan*:

$$\begin{aligned} P(A \cup (B^c \cup C^c)^c) &= P(A \cup (B \cap C)) \\ &= P(A) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Επειδή $A \cap B \cap C \subseteq A \cap C$ και $P(A \cap C) = 0$, τότε $P(A \cap B \cap C) = 0$. Άρα,

$$P(A \cup (B \cap C)) = P(A) + P(B \cap C) - 0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

(γ) Δίνεται ότι $P(A^c \cap (B^c \cup C^c)) = 0.65$. Εφαρμόζοντας τους κανόνες *DeMorgan* προκύπτει ότι

$$(A^c \cap (B^c \cup C^c))^c = A \cup (B^c \cup C^c)^c = A \cup (B \cap C)$$

που είναι το γεγονός του οποίου την πιθανότητα θέλουμε να βρούμε. Οπότε, ισχύει ότι

$$P(A \cup (B^c \cup C^c)^c) = 1 - P(A^c \cap (B^c \cup C^c)) = 1 - 0.65 = 0.35$$

Άσκηση 3

Έστω ότι ρίχνονται δύο ζάρια.

- (α) Περιγράψτε τον δειγματικό χώρο Ω .
- (β) Να βρεθεί η πιθανότητα το άθροισμα των δύο όψεων να είναι ακριβώς 7.
- (γ) Να βρεθεί η πιθανότητα το άθροισμα των δύο όψεων να είναι τουλάχιστον 11.
- (δ) Να βρεθεί η πιθανότητα να ήρθε διπλή ζαριά.

Λύση

(α) Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη (i, j) , όπου i είναι το αποτέλεσμα του πρώτου ζαριού και j το αποτέλεσμα του δεύτερου. Κάθε ζάρι έχει 6 πιθανά αποτελέσματα $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Επομένως, ο συνολικός αριθμός των δυνατών αποτελεσμάτων είναι $6 \times 6 = 36$.

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & (1, 4) & (1, 5) & (1, 6) \\ (2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & (2, 4) & (2, 5) & (2, 6) \\ (3, 1) & (3, 2) & (3, 3) & (3, 4) & (3, 5) & (3, 6) \\ (4, 1) & (4, 2) & (4, 3) & (4, 4) & (4, 5) & (4, 6) \\ (5, 1) & (5, 2) & (5, 3) & (5, 4) & (5, 5) & (5, 6) \\ (6, 1) & (6, 2) & (6, 3) & (6, 4) & (6, 5) & (6, 6) \end{array} \right\}$$

(β) Έστω A το ενδεχόμενο το άθροισμα να είναι 7. Τα ευνοϊκά αποτελέσματα είναι:

$$A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

Υπάρχουν 6 ευνοϊκά αποτελέσματα. Χρησιμοποιώντας τον εκ των προτέρων ορισμό:

$$P(E) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(γ) Έστω B το ενδεχόμενο το άθροισμα να είναι τουλάχιστον 11, δηλαδή 11 ή 12 (το μέγιστο). Εφόσον έχουμε εξάεδρα ζάρια, το μέγιστο άθροισμα που μπορούμε να πετύχουμε είναι 12. Τα ευνοϊκά αποτελέσματα είναι:

$$B = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$$

Υπάρχουν 3 ευνοϊκά αποτελέσματα. Η πιθανότητα είναι:

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

(δ) Έστω C το ενδεχόμενο να έχουμε διπλή ζαριά, δηλαδή το ίδιο αποτέλεσμα και στα δύο ζάρια. Τα ευνοϊκά αποτελέσματα είναι:

$$C = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

Υπάρχουν 6 ευνοϊκά αποτελέσματα. Η πιθανότητα είναι:

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Άσκηση 4

Σε ένα κολλέγιο, το 72% των μαθημάτων έχουν τελικές εξετάσεις και το 46% των μαθημάτων έχουν υποχρεωτικές εργασίες. Το 32% των μαθημάτων έχουν και τα δύο, δηλαδή τελική εξέταση και εργασία.

Έστω τα ενδεχόμενα:

A : Το μάθημα έχει τελική εξέταση

B : Το μάθημα έχει υποχρεωτική εργασία.

- (α) Να βρεθεί η πιθανότητα το μάθημα να έχει τελική εξέταση ή εργασία.
- (β) Να βρεθεί η πιθανότητα το μάθημα να έχει μόνο τελική εξέταση.
- (γ) Να βρεθεί η πιθανότητα το μάθημα να έχει μόνο μία από τις δύο απαιτήσεις.

Λύση

Από τα δεδομένα έχουμε: $P(A) = 0.72$, $P(B) = 0.46$, και $P(A \cap B) = 0.32$.

(α) Η πιθανότητα το μάθημα να έχει τελική εξέταση **ή** εργασία είναι $P(A \cup B)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.72 + 0.46 - 0.32 = 0.86$$

(β) Η πιθανότητα το μάθημα να έχει **μόνο** τελική εξέταση είναι η πιθανότητα να έχει εξέταση και να μην έχει εργασία, δηλαδή $P(A \cap B^c)$.

$$P(A \cap B^c) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.72 - 0.32 = 0.40$$

(γ) Η πιθανότητα το μάθημα να έχει **μόνο μία** από τις δύο απαιτήσεις είναι η πιθανότητα να έχει μόνο εξέταση (και όχι εργασία) ή μόνο εργασία (και όχι εξέταση). Αυτό αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$. Τα δύο αυτά ενδεχόμενα είναι ξένα μεταξύ τους, άρα:

$$P((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) = P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B)$$

Γνωρίζουμε από το προηγούμενο ερώτημα ότι $P(A \cap B^c) = 0.40$. Υπολογίζουμε το $P(A^c \cap B)$:

$$P(A^c \cap B) = P(B \cap A^c) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0.46 - 0.32 = 0.14$$

Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$0.40 + 0.14 = 0.54$$

Άσκηση 5

Μια τάξη μαθηματικών αποτελείται από 14 γυναίκες και 16 άνδρες. Οι μισές γυναίκες και 12 από τους άντρες σπουδάζουν Πληροφορική. Ένα άτομο επιλέγεται τυχαία από την τάξη. Υπολογίστε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

- (α) A : Το άτομο που επιλέγεται είναι μια γυναίκα
- (β) B : Το άτομο που επιλέγεται σπουδάζει Πληροφορική
- (γ) C : Το άτομο που επιλέγεται είναι μια γυναίκα που σπουδάζει Πληροφορική
- (δ) D : Το άτομο που επιλέγεται είναι μια γυναίκα ή κάποιος που σπουδάζει Πληροφορική

Λύση

- Συνολικός αριθμός ατόμων στην τάξη: $14 + 16 = 30$.
- Αριθμός γυναικών που σπουδάζουν Πληροφορική: $\frac{14}{2} = 7$.
- Αριθμός ανδρών που σπουδάζουν Πληροφορική: 12.
- Συνολικός αριθμός ατόμων που σπουδάζουν Πληροφορική: $7 + 12 = 19$.

(α) Η πιθανότητα το άτομο που επιλέγεται να είναι γυναίκα είναι:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

(β) Η πιθανότητα το άτομο που επιλέγεται να σπουδάζει Πληροφορική είναι:

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{19}{30}$$

(γ) Η πιθανότητα το άτομο να είναι γυναίκα **και** να σπουδάζει Πληροφορική είναι:

$$P(C) = P(A \cap B) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{7}{30}$$

(δ) Η πιθανότητα το άτομο να είναι γυναίκα **ή** να σπουδάζει Πληροφορική είναι:

$$P(D) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{14}{30} + \frac{19}{30} - \frac{7}{30} = \frac{26}{30} = \frac{13}{15}$$

Άσκηση 6

Ένα κουτί περιέχει τρεις μπίλιες αριθμημένες με τους αριθμούς 1, 2 και 3. Τραβάμε δύο μπίλιες με αντικατάσταση, δηλαδή αφού τραβήξουμε την πρώτη μπίλια, την ξαναβάζουμε πίσω στο κουτί πριν τραβήξουμε τη δεύτερη. Να βρείτε την πιθανότητα το άθροισμα των αριθμών των δύο μπιλιών να είναι τουλάχιστον 4.

Λύση

Επειδή η επιλογή γίνεται με αντικατάσταση, το αποτέλεσμα της πρώτης κλήρωσης δεν επηρεάζει τη δεύτερη. Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη (i, j) , όπου i είναι ο αριθμός της πρώτης μπίλιας και j της δεύτερης.

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

Ο συνολικός αριθμός των δυνατών αποτελεσμάτων είναι $3 \times 3 = 9$.

Έστω A το ενδεχόμενο το άθροισμα των αριθμών να είναι τουλάχιστον 4 (δηλαδή 4, 5 ή 6).

- Άθροισμα 4: (1,3), (2,2), (3,1)
- Άθροισμα 5: (2,3), (3,2)
- Άθροισμα 6: (3,3)

Τα ευνοϊκά αποτελέσματα είναι το σύνολο:

$$A = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

Ο αριθμός των ευνοϊκών αποτελεσμάτων είναι 6.

Η πιθανότητα του ενδεχομένου A είναι:

$$P(E) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Άσκηση 7

Σε μία πόλη κυκλοφορούν τρεις εφημερίδες A, B, Γ . Τα ποσοστά των κατοίκων της πόλης που διαβάζουν αυτές τις εφημερίδες είναι τα ακόλουθα:

$$A : 10\%, \quad B : 30\%, \quad \Gamma : 5\%, \quad A \text{ και } B : 8\%, \quad A \text{ και } \Gamma : 2\%, \quad B \text{ και } \Gamma : 4\%$$

Τέλος, το 1% διαβάζει και τις τρεις εφημερίδες.

- (α) Ποιο ποσοστό των κατοίκων διαβάζει μόνο μια εφημερίδα;
- (β) Ποιο ποσοστό των κατοίκων διαβάζει τουλάχιστον δύο εφημερίδες;
- (γ) Εάν οι A και Γ είναι πρωινές εφημερίδες ενώ η B είναι απογευματινή, ποιο ποσοστό των κατοίκων διαβάζει τουλάχιστον μία πρωινή καθώς επίσης και την απογευματινή;
- (δ) Πόσοι κάτοικοι δεν είναι αναγνώστες καμίας εφημερίδας;

Λύση

Δίνονται οι ακόλουθες πιθανότητες:

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.10, & P(B) &= 0.30, & P(\Gamma) &= 0.05, \\ P(A \cap B) &= 0.08, & P(A \cap \Gamma) &= 0.02, & P(B \cap \Gamma) &= 0.04, \\ P(A \cap B \cap \Gamma) &= 0.01. \end{aligned}$$

Για συντομία, θέτουμε $C = \Gamma$.

Από τις δοθείσες τιμές:

$$P(ABC) = 0.01, \quad P(AB) = 0.08, \quad P(BC) = 0.04, \quad P(AC) = 0.02.$$

Βήμα 1. Υπολογίζουμε τις πιθανότητες των περιοχών που περιλαμβάνουν δύο γεγονότα, αλλά όχι και τα τρία, δηλαδή τις περιοχές όπου κάποιος διαβάζει ακριβώς δύο εφημερίδες.

$$P(ABC^c) = P(AB) - P(ABC) = 0.08 - 0.01 = 0.07,$$

$$P(A^cBC) = P(BC) - P(ABC) = 0.04 - 0.01 = 0.03,$$

$$P(AB^cC) = P(AC) - P(ABC) = 0.02 - 0.01 = 0.01.$$

Βήμα 2. Υπολογίζουμε τώρα τις περιοχές όπου κάποιος διαβάζει μόνο μία εφημερίδα.

Για το A :

$$P(A) = P(ABC) + P(ABC^c) + P(AB^cC) + P(AB^cC^c),$$

άρα

$$P(AB^cC^c) = P(A) - [P(ABC) + P(ABC^c) + P(AB^cC)] = 0.10 - (0.01 + 0.07 + 0.01) = 0.01.$$

Για το B :

$$P(B) = P(ABC) + P(ABC^c) + P(A^cBC) + P(A^cBC^c),$$

οπότε

$$P(A^cBC^c) = P(B) - (0.01 + 0.07 + 0.03) = 0.19.$$

Για το C :

$$P(C) = P(ABC) + P(AB^cC) + P(A^cBC) + P(A^cB^cC),$$

άρα

$$P(A^cB^cC) = 0.05 - (0.01 + 0.01 + 0.03) = 0.$$

Βήμα 3. Το συνολικό ποσοστό των κατοίκων που διαβάζουν κάποια εφημερίδα είναι:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = 0.32.)$$

Άρα

$$P(A^c B^c C^c) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - 0.32 = 0.68.$$

Αν ορίσουμε τα παρακάτω ενδεχόμενα:

E : Κάποιος διαβάζει μόνο μία εφημερίδα,

F : Κάποιος διαβάζει τουλάχιστον δύο εφημερίδες,

G : Κάποιος διαβάζει τουλάχιστον μία πρωινή (A ή C) και την απογευματινή (B),

H : Κάποιος δεν διαβάζει καμία εφημερίδα,

τότε έχουμε:

$$(a) \quad P(E) = P(AB^c C^c) + P(A^c BC^c) + P(A^c B^c C) \\ = 0.01 + 0.19 + 0 = 0.20.$$

$$(b) \quad P(F) = P(AB) + P(AC) + P(BC) - 2P(ABC) \\ = 0.08 + 0.02 + 0.04 - 2(0.01) = 0.12.$$

$$(c) \quad P(G) = P(B \cap (A \cup C)) = P(AB) + P(BC) - P(ABC) \\ = 0.08 + 0.04 - 0.01 = 0.11.$$

$$(d) \quad P(H) = P(A^c B^c C^c) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 0.68.$$