

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1

Τρεις παίκτες, οι A, B, C , ρίχνουν με αυτή τη σειρά ένα κέρμα. Ο πρώτος που θα φέρει κορώνα κερδίζει (οπότε και το παιχνίδι τελειώνει). Δώστε μία περιγραφή του δειγματικού χώρου Ω για αυτό το πείραμα τύχης. Με βάση την περιγραφή σας, ορίστε τα ακόλουθα γεγονότα στον Ω και δώστε τα στοιχεία τους:

- α) $A = \{ \text{Κερδίζει ο } A \}$
- β) $B = \{ \text{Κερδίζει ο } B \}$
- γ) $(A \cup B)^c$. Περιγράψτε με μία φράση ποιο είναι το γεγονός αυτό.

Λύση

Κάθε ρίψη του κέρματος μπορεί να καταλήξει είτε σε κορώνα (που την συμβολίζουμε με 1) είτε σε γράμματα (που την συμβολίζουμε με 0). Το πείραμα συνεχίζεται έως ότου κάποιος παίκτης φέρει 1.

Ο αριθμήσιμα άπειρος δειγματοχώρος του πειράματος αυτού μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

$$\Omega = \{ 00000\cdots 000\cdots, 1, 01, 001, 0001, 00001, \dots \}$$

- α) Αυτό σημαίνει ότι ο πρώτος παίκτης που φέρνει κορώνα είναι ο A . Άρα, το γεγονός A αποτελείται από όλες τις ακολουθίες (αριθμήσιμα άπειρος το πλήθος) της μορφής 1, 0001, 0000001 κτλ.

$$A = \{ 1, 0001, 0000001, \dots \}$$

- β) Αυτό σημαίνει ότι ο A φέρνει γράμματα στην πρώτη του ρίψη (0) και ο B φέρνει κορώνα στη δική του ρίψη (1). Άρα το B αποτελείται από όλες τις ακολουθίες της μορφής 01, 00001, 00000001, κτλ.

$$B = \{ 01, 00001, 00000001, \dots \}$$

- γ) Το γεγονός $(A \cup B)^c$ είναι να μην κερδίσει κανείς ή να κερδίσει ο παίκτης C :

$$(A \cup B)^c = \{ 00000\dots, 001, 000001, \dots \}$$

Άσκηση 2

Ένα κουτί περιέχει 3 μπίλιες, 1 κόκκινη, 1 πράσινη και 1 μπλε. Θεωρείστε ένα πείραμα κατά το οποίο παίρνουμε μια μπίλια από το κουτί, την επανατοποθετούμε στο κουτί και τραβάμε μια δεύτερη μπίλια από το κουτί. Περιγράψτε το δειγματικό χώρο του πειράματος. Επαναλάβετε τραβώντας τη δεύτερη μπίλια χωρίς την επανατοποθέτηση της πρώτης.

Λύση

α) Περιγράψτε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

Όταν τραβάμε την πρώτη μπίλια, υπάρχουν τρία ενδεχόμενα:

1. Να είναι η κόκκινη (r)
2. Να είναι η πράσινη (g)
3. Να είναι η μπλε (b).

Όταν τραβάμε τη δεύτερη μπίλια, υπάρχουν ξανά τρία ενδεχόμενα, καθώς επανατοποθετήσαμε την πρώτη μπίλια.

Άρα:

Αν η πρώτη μπίλια είναι κόκκινη (r), τότε η δεύτερη μπορεί να είναι κόκκινη (r), πράσινη (g), ή μπλε (b).

Αν η πρώτη μπίλια είναι πράσινη (g), τότε η δεύτερη μπορεί να είναι κόκκινη (r), πράσινη (g), ή μπλε (b).

Αν η πρώτη μπίλια είναι μπλε (b), τότε η δεύτερη μπορεί να είναι κόκκινη (r), πράσινη (g), ή μπλε (b).

$$\Omega = \{ (r, r), (r, g), (r, b), (g, r), (g, g), (g, b), (b, r), (b, g), (b, b) \}$$

β) Όταν τραβάμε την πρώτη μπίλια όπως πριν, υπάρχουν τρία ενδεχόμενα: κόκκινη (r), πράσινη (g) ή μπλε (b). Όμως σε αυτή την περίπτωση δεν επανατοποθετούμε την πρώτη μπίλια. Αυτό σημαίνει ότι όταν τραβάμε τη δεύτερη μπίλια, μένουν 2 μπίλιες στο κουτί.

Άρα:

Αν η πρώτη μπίλια είναι κόκκινη (r), τότε οι εναπομείνουσες μπίλιες είναι η πράσινη (g) και η μπλε (b).

Αν η πρώτη μπίλια είναι πράσινη (g), τότε οι εναπομείνουσες μπίλιες είναι η κόκκινη (r) και η μπλε (b).

Αν η πρώτη μπίλια είναι μπλε (b), τότε οι εναπομείνουσες μπίλιες είναι η κόκκινη (r) και η πράσινη (g).

$$\Omega = \{ (r, g), (r, b), (g, r), (g, b), (b, r), (b, g) \}$$

Άσκηση 3

Σε έναν πληθυσμό καταγράφουμε το φύλο των παιδιών για οικογένειες με 3 παιδιά. Ορίζουμε με A να είναι ένα παιδί αγόρι και με K να είναι ένα παιδί κορίτσι. Η σειρά καταγραφής είναι η σειρά ηλικίας.

α) Προσδιορίστε τον δειγματικό χώρο.

β) Εκφράστε τα εξής σύνολα:

1. $X = H$ οικογένεια έχει τουλάχιστον δύο αγόρια.
2. $Y = T$ Το πρώτο παιδί της οικογένειας είναι αγόρι.
3. $Z = O$ Όλα τα παιδιά της οικογένειας έχουν το ίδιο φύλο.

Λύση

- α) Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από όλες τις πιθανές τριάδες παιδιών. Κάθε παιδί μπορεί να είναι είτε αγόρι (Α) είτε κορίτσι (Κ). Άρα, για κάθε θέση στην τριάδα, έχουμε 2 δυνατές επιλογές:

1. Πρώτο παιδί: Α ή Κ
2. Δεύτερο παιδί: Α ή Κ
3. Τρίτο παιδί: Α ή Κ

Αφού έχουμε 2 επιλογές για το πρώτο παιδί, 2 για το δεύτερο και 2 για το τρίτο, ο συνολικός αριθμός των δυνατών τριάδων είναι 2^3 , δηλαδή 8 στοιχεία:

$$\Omega = \{AAA, AAK, AKA, AKK, KAA, KAK, KKA, KKK\}$$

- β) Σύνολο $X = H$ οικογένεια έχει τουλάχιστον δύο αγόρια.

Για να βρούμε το σύνολο X , πρέπει να εντοπίσουμε όλες τις τριάδες στον δειγματικό χώρο που έχουν τουλάχιστον δύο αγόρια, δηλαδή δύο ή τρία αγόρια.

$$X = \{AAA, AAK, AKA, KAA\}$$

Σύνολο $Y = T$ Το πρώτο παιδί της οικογένειας είναι αγόρι.

Για να βρούμε το σύνολο Y , πρέπει να εντοπίσουμε όλες τις τριάδες στον δειγματικό χώρο όπου το πρώτο παιδί είναι αγόρι (Α).

$$Y = \{AAA, AAK, AKA, AKK\}$$

Σύνολο $Z = O$ Όλα τα παιδιά της οικογένειας έχουν το ίδιο φύλο.

Για να βρούμε το σύνολο Z , πρέπει να εντοπίσουμε όλες τις τριάδες στον δειγματικό χώρο όπου και τα τρία παιδιά είναι όλα αγόρια είτε όλα κορίτσια.

$$Z = \{AAA, KKK\}$$

Άσκηση 4

Από τους μαθητές σε μία τάξη, 60% είναι διάνοιες, 70% είναι ΑΕΚτζήδες και 25% δεν ανήκουν σε καμία από αυτές τις δύο κατηγορίες. Ποια η πιθανότητα ότι ένας τυχαία επιλεγμένος μαθητής είναι διάνοια ή ΑΕΚτζής αλλά όχι και τα δύο;

Λύση

Έστω G το γεγονός ότι ο επιλεγμένος μαθητής είναι διάνοια, και C το γεγονός ότι ο επιλεγμένος μαθητής είναι ΑΕΚτζής. Μας δίδεται ότι:

$$P(G) = 0.6, \quad P(C) = 0.7, \quad P(G^c \cap C^c) = 0.25.$$

Χρησιμοποιώντας ιδιότητες, θα έχουμε ότι:

$$P(G \cup C) =$$

$$P(G) + P(C) - P(G \cap C) = 1 - P(G^c \cap C^c)$$

$$\Rightarrow 0.6 + 0.7 - P(G \cap C) = 1 - 0.25$$

$$\Rightarrow P(G \cap C) = 0.55.$$

Ψάχνουμε την πιθανότητα της ένωσης δύο ξένων μεταξύ τους γεγονότων $P((G \cap C^c) \cup (C \cap G^c))$

Ισχύει ότι:

$$P(G \cap C^c) = P(G) - P(G \cap C) = 0.6 - 0.55 = 0.05.$$

Με τον ίδιο τρόπο, βρίσκουμε ότι:

$$P(C \cap G^c) = P(C) - P(C \cap G) = 0.7 - 0.55 = 0.15.$$

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα θα ισούται με:

$$\begin{aligned} P((G \cap C^c) \cup (C \cap G^c)) &= P(G \cap C^c) + P(C \cap G^c) = \\ &= 0.05 + 0.15 = 0.2. \end{aligned}$$

Άσκηση 5

Έστω A, B και C τρία γεγονότα ορισμένα στον δειγματοχώρο Ω ενός πειράματος τύχης. Επιπλέον δίνεται ότι:

1. $P(A) = P(B) = P(C) = 0.4$
2. $P(A \cap B) = 0.4$
3. $P(A \cap C) = 0.3$
4. $P(B \cap C) = 0.2$
5. $P(A \cap B \cap C) = 0.1$

Υπολογίστε την πιθανότητα:

- α) $P(A \cap B^c \cap C)$
- β) $P(A \cup B \cup C)$

Λύση

- α) $P(A \cap B^c \cap C)$

Από την αντιμεταθετική ιδιότητα: $P(A \cap B^c \cap C) = P((A \cap C) \cap B^c)$

Από την ιδιότητα της διαφοράς, γνωρίζουμε ότι $(A \cap C) \cap B^c = (A \cap C) - B$. Επομένως:

$$P((A \cap C) - B) = P(A \cap C) - P((A \cap C) \cap B) = P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) = 0.3 - 0.1 = 0.2$$

- β) $P(A \cup B \cup C)$

Θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$ όπου:

- $X = (A \cup B)$
- $Y = C$

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) = \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) \end{aligned} \quad (1)$$

Επιμεριστική ιδιότητα: $P((A \cup B) \cap C) = P(A \cap C) \cup (B \cap C)$

$$\begin{aligned} &= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap C \cap B \cap C) = \\ &= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \end{aligned} \quad (2)$$

Συνεχίζουμε την (1) αντικαθιστώντας την σχέση (2):

$$\begin{aligned} &P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - (P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)) = \\ &= 0.4 + 0.4 - 0.4 + 0.4 - (0.3 + 0.2 - 0.1) = 0.4 \end{aligned}$$

Άσκηση 6

Σε μια τάξη το 60% των μαθητών παίζει μπάσκετ, το 70% αγαπά την σοκολάτα και το 40% ανήκει και στις δύο κατηγορίες. Υπολογίστε τις πιθανότητες ένας μαθητής που επιλέγεται τυχαία:

- α) Να μην παίζει μπάσκετ και να μην αγαπά την σοκολάτα.
- β) Να μην παίζει μπάσκετ ή να αγαπά τη σοκολάτα (ή και τα δύο μαζί).

Λύση

Ορίζουμε τα εξής ενδεχόμενα:

A: { Ο μαθητής παίζει μπάσκετ. }

B: { Ο μαθητής αγαπά την σοκολάτα. }

$A \cap B$: { Ο μαθητής παίζει μπάσκετ και αγαπά την σοκολάτα }

Από τα δεδομένα:

$$P(A)=0.6$$

$$P(B)=0.7$$

$$P(A \cap B)=0.4$$

- α) Υπολογίστε την πιθανότητα ένας μαθητής που επιλέγεται τυχαία να μην παίζει μπάσκετ και να μην αγαπά την σοκολάτα.

Ψάχνουμε την πιθανότητα $P(A^c \cap B^c)$.

Από *DeMorgan* γνωρίζουμε ότι:

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) \quad (1)$$

Από τις ιδιότητες βρίσκουμε $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Επόμενως η σχέση (1): $1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - (0.6 + 0.7 - 0.4) = 0.1$

Άρα η πιθανότητα είναι 10%.

- β) Υπολογίστε την πιθανότητα ένας μαθητής που επιλέγεται τυχαία να μην παίζει μπάσκετ ή να αγαπά τη σοκολάτα (ή και τα δύο μαζί).

Ψάχνουμε την πιθανότητα $P(A^c \cup B)$.

$$\text{Από τις ιδιότητες: } P(A^c \cup B) = P(A^c) + P(B) - P(A^c \cap B) \quad (2)$$

- $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4$
- $P(B) = 0.7$
- $P(A^c \cap B) = P(B \cap A^c) = P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = 0.7 - 0.4 = 0.3$

Επόμενως η ζητούμενη πιθανότητα: $P(A^c \cup B) = 0.4 + 0.7 - 0.3 = 0.8$

Άρα η πιθανότητα είναι 80%.

Άσκηση 7

Ένα αρωματοπωλείο γιορτάζει τα δέκα χρόνια λειτουργίας του προσφέροντας δύο από τα ακριβότερα αρώματα του στη μισή τιμή, το άρωμα 1 και το άρωμα 2. Στην προσφορά αυτή ανταποκρίθηκαν 400 πελάτες. Γνωρίζουμε ότι ο κάθε πελάτης αγόρασε τουλάχιστον ένα από τα δύο αρώματα. Έστω ότι 240 πελάτες αγόρασαν το άρωμα 1 και 340 το άρωμα 2. Θεωρούμε τα εξής γεγονότα:

$A = \{\text{Ο πελάτης αγόρασε το άρωμα 1}\}$

$B = \{\text{Ο πελάτης αγόρασε το άρωμα 2}\}$

Διαλέγοντας έναν πελάτη στην τύχη:

- Υπολογίστε την πιθανότητα να αγόρασε μόνο το άρωμα 2.
- Υπολογίστε την πιθανότητα να αγόρασε μόνο ένα από τα δύο αρώματα.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι ο κάθε πελάτης αγόρασε τουλάχιστον ένα από τα δύο αρώματα: $P(A \cup B) = 1$

Έστω ότι 240 από τους 400 πελάτες αγόρασαν το άρωμα 1: $P(A) = \frac{240}{400}$

Έστω ότι 340 από τους 400 πελάτες αγόρασαν το άρωμα 2: $P(B) = \frac{340}{400}$

- Ψάχνουμε την πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος πελάτης να αγόρασε μόνο το άρωμα 2, δηλαδή να αγόρασε το άρωμα 2 και όχι το άρωμα 1.

Συνεπώς ψάχνουμε το εξής: $P(B \cap A^c)$.

$$P(B \cap A^c) = P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) \quad (1)$$

Μας λείπει το $P(A \cap B)$, το οποίο θα υπολογίσουμε από τα παραπάνω δεδομένα.

$$P(A \cup B) = 1 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1 \Leftrightarrow$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 1 = \frac{240}{400} + \frac{340}{400} - 1 = \frac{180}{400}$$

Επόμενως η σχέση (1):

$$P(B) - P(B \cap A) = \frac{340}{400} - \frac{180}{400} = \frac{2}{5}.$$

Άρα η πιθανότητα είναι $\frac{2}{5} = 0.4 = 40\%$.

- Ψάχνουμε την πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος πελάτης να αγόρασε μόνο ένα από τα δύο αρώματα, δηλαδή να αγόρασε το 1 και όχι το 2 ή να αγόρασε το 2 και όχι το 1.

Συνεπώς ψάχνουμε το εξής: $P((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) = P((A - B) \cup (B - A))$.

Με χρήση ιδιοτήτων:

$$P((A - B) \cup (B - A)) = P(A - B) + P(B - A) - P((A - B) \cap (B - A)) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) =$$

$$= \frac{240}{400} + \frac{340}{400} - 2 * \frac{180}{400} = \frac{11}{20}$$

Σημειώστε ότι $P((A - B) \cap (B - A)) = 0$, γιατί πρόκειται για ξένα μεταξύ τους γεγονότα.

Άρα η πιθανότητα είναι $\frac{11}{20} = 0.55 = 55\%$.