

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Έκτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 17/12/2024

Ημερομηνία Παράδοσης: 19/01/2025

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, **εδώ**. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΠΟΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1

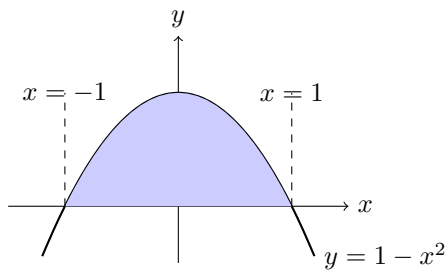
Έστω ότι η από κοινού σ.π.π δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y δίνεται από τον τύπο:

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x^2 + y), & 0 \leq y \leq 1 - x^2 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- (α) Προσδιορίστε την τιμή της σταθεράς c .
- (β) Υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}(0 \leq X \leq \frac{1}{2})$.
- (γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}(Y \leq X + 1)$.
- (δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}(Y = X^2)$.

Λύση

- (α) Σχεδιάζοντας την γραφική παράσταση της καμπύλης $y = 1 - x^2$ (Σχήμα 1) βλέπουμε τα όρια του ολοκληρώματος. Θέλουμε $y \leq 1 - x^2$ και ταυτόχρονα τα σημεία πάνω από τον άξονα x , δηλαδή $0 \leq y \leq 1 - x^2$, παίρνουμε επίσης $x \in [-1, 1]$



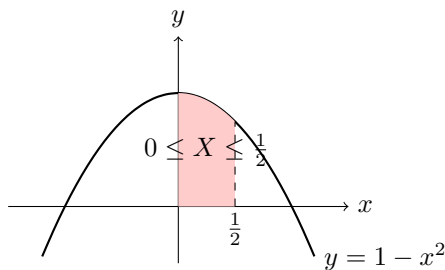
Σχήμα 1: Η σκιασμένη επιφάνεια κάτω από την $y = 1 - x^2$.

Τελικά:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy dx &= \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} c(x^2 + y) dy dx \\
 &= \int_{-1}^1 c \int_0^{1-x^2} (x^2 + y) dy dx \\
 &= \int_{-1}^1 c \left[x^2 y + \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x^2} dx \\
 &= \dots = \int_{-1}^1 \frac{-cx^4 + c}{2} dx \\
 &= \left[\frac{-cx^5 + 5cx}{10} \right]_{-1}^1 \\
 &= \dots = \frac{4}{5}c
 \end{aligned}$$

Επομένως $c = \frac{5}{4}$

(β) Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2, η ζητούμενη σκιασμένη επιφάνεια είναι $0 \leq X \leq \frac{1}{2}$.

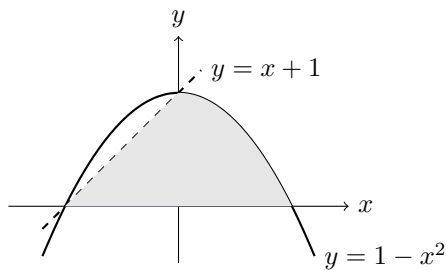


Σχήμα 2: Η σκιασμένη επιφάνεια όπου $0 \leq X \leq \frac{1}{2}$.

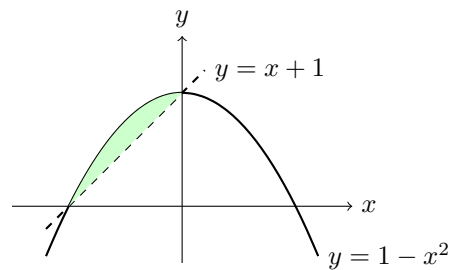
Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(0 \leq X \leq \frac{1}{2}) &= \iint_{\text{κόκκινη επιφάνεια}} f(x, y) dx dy \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{1-x^2} \frac{5}{4}(x^2 + y) dy dx \\
 &= \left[\frac{-\frac{5}{4}x^5 + 5\frac{5}{4}x}{10} \right]_0^{\frac{1}{2}} \\
 &= \dots = \frac{79}{256}
 \end{aligned}$$

(γ) Τα όρια του ολοκληρώματος φαίνονται από το Σχήμα 3, για ευκολία θα χρησιμοποιήσουμε το Σχήμα 4.



Σχήμα 3: Γκρι Επιφάνεια



Σχήμα 4: Πράσινη Επιφάνεια

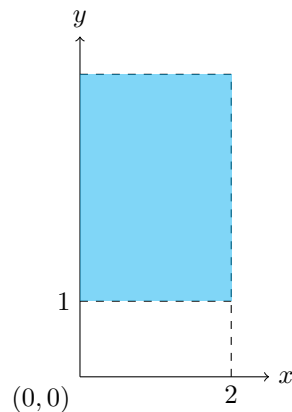
Για ευκολία στις πράξεις θα αντικαταστήσουμε το c στο τέλος:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(Y \leq X + 1) &= \iint_{\text{γκρι επιφάνεια}} f(x, y) dx dy = 1 - \iint_{\text{πράσινη επιφάνεια}} f(x, y) dx dy \\
 &= 1 - \int_{-1}^0 c \left[x^2 y + \frac{y^2}{2} \right]_{1-x^2}^{x+1} dx \\
 &= \dots = 1 - \int_{-1}^0 \frac{-cx^4 - 3cx^2 - 2cx}{2} - cx^3 dx \\
 &= 1 - \left[-\frac{cx^5}{10} - \frac{3cx^3}{10} - \frac{2cx^2}{4} - \frac{cx^4}{4} \right]_{-1}^0 \\
 &= 1 - \frac{3}{20}c = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}
 \end{aligned}$$

Άσκηση 2

Έστω ότι ένα σημείο της μορφής (X, Y) επιλέγεται τυχαία μέσα στο τετράπλευρο χωρίο S που ορίζεται παρακάτω (Σχήμα 5):

$$S = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2 \text{ και } 1 \leq y \leq 4\}$$



Σχήμα 5: Χωρίο S

- Προσδιορίστε την από κοινού σ.π.π.
- Υπολογίστε τις περιθώριες σ.π.π. για τις τυχαίες μεταβλητές X, Y .
- Είναι οι τυχαίες μεταβλητές X, Y ανεξάρτητες; Εξηγήστε την απάντησή σας.
- Αν το σημείο (X, Y) επιλεγεί τυχαία μέσα στο μοναδιαίο κύκλο, είναι οι τυχαίες μεταβλητές X, Y ανεξάρτητες; Εξηγήστε την απάντησή σας.

Λύση

- (α) Προφανώς η $f(x, y)$ είναι σταθερή μέσα στο τετράπλευρο εμβαδού $6 = ((2 - 0) \times (4 - 1))$. Άρα εύκολα βλέπουμε ότι

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \forall x, y \in S \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- (β) Για $x \in [0, 2]$:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_1^4 \frac{1}{6} dy = \frac{1}{2}.$$

Προφανώς, $f_1(x) = 0$ για $x \notin [0, 2]$. Ομοίως, για $1 \leq y \leq 4$:

$$f_2(y) = \int_0^2 \frac{1}{6} dx = \frac{1}{3}.$$

- (γ) Εφόσον ισχύει ότι

$$f(x, y) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = f_1(x)f_2(y)$$

Οι ΤΜ X, Y είναι ανεξάρτητες

- (δ) $f(x, y)$ είναι σταθερή στον μοναδιαίο κύκλο ($y^2 + x^2 = 1$), ενώ το εμβαδό του κύκλου είναι π μονάδες, ακολούθως $f(x, y) = 1/\pi$ μέσα στον κύκλο και $f(x, y) = 0$ εκτός αυτού. Το x παίρνει τιμές από -1 έως 1 . Για κάθε x σε αυτό το διάστημα, $f(x, y) > 0$ μόνο για τιμές y μεταξύ $-(1 - x^2)^{1/2}$ και $(1 - x^2)^{1/2}$. Άρα για $-1 \leq x \leq 1$ παίρνουμε:

$$f_1(x) = \int_{-(1-x^2)^{1/2}}^{(1-x^2)^{1/2}} \frac{1}{\pi} dy = \frac{2}{\pi}(1 - x^2)^{1/2}.$$

Επίσης, $f_1(x) = 0$ διαφορετικά. Λόγω συμμετρίας, η μεταβλητή Y θα έχει την ίδια περιθώρια σ.π.π όπως την X .

Εδώ:

$$f(x, y) \neq f_1(x)f_2(y)$$

Επομένως, σε αντίθεση με προηγουμένως όταν οι ΤΜ ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή πάνω από κύκλο δεν είναι ανεξάρτητες.

Άσκηση 3

Ο Στέλιος και η Στέλλα σχεδιάζουν να πάνε σινεμά για να παρακολουθήσουν την ταινία *Moneyball*. Η ταινία ξεκινά στις 7:20 μ.μ., γι' αυτό αποφασίζουν να συναντηθούν έξω από το σινεμά σε ένα χρονικό διάστημα μεταξύ 6:00 μ.μ. και 7:00 μ.μ. Ωστόσο, η Στέλλα δεν αντέχει να περιμένει, οπότε συμφωνούν ότι κανένας από τους δύο δεν θα περιμένει τον άλλο για περισσότερο από 15 λεπτά. Ποια είναι η πιθανότητα να συναντηθούν έξω από το σινεμά;

Λύση

Έστω X και Y δύο τυχαίες μεταβλητές που μοντελοποιούν τις ώρες άφιξης του Στέλλιου και της Στέλλας μετά τις 6:00. Υποθέτοντας ότι ίσα χρονικά διαστήματα, έχουν ίσες πιθανότητες άφιξης, οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των προηγούμενων τυχαίων μεταβλητών γίνονται:

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

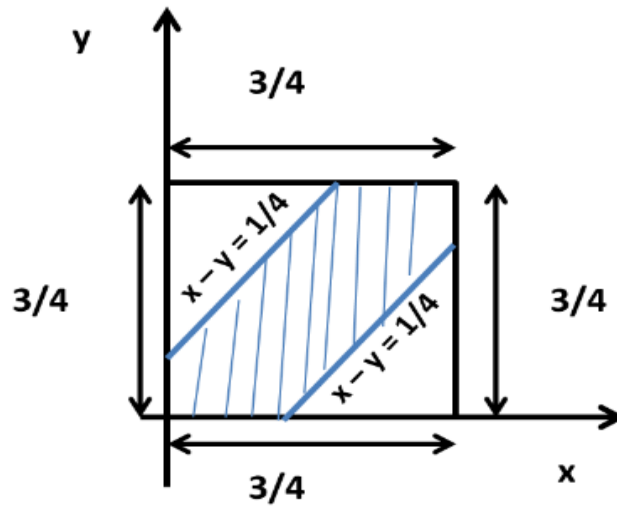
Οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες. Επομένως, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας γίνεται:

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq 1 \text{ και } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Εφόσον 15 λεπτά είναι το $1/4$ της ώρας, η πιθανότητα που ζητείται είναι:

$$E = 1 - 2 \cdot E_{\text{τρι}} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{16}.$$

και υπολογίζεται από το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής του Σχήματος 6.



Σχήμα 6: Εμβαδό για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας.

Άσκηση 4

Θεωρούμε την τ.μ. X η οποία είναι ομοιόμορφα κατανομημένη μεταξύ των τιμών 1 και 2, δηλαδή: $X \sim U[1, 2]$. Ορίζουμε μια νέα τυχαία μεταβλητή ως εξής: $Y = e^{-2X}$.

- Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. X , $f_X(x)$, καθώς και αυτή του μετασχηματισμού $Y = e^{-2X}$.
- Να υπολογιστεί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τ.μ. Y , $F_Y(y)$, και να γίνει η γραφική της παράσταση.
- Να υπολογιστεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. Y , $f_Y(y)$, και να γίνει η γραφική της παράσταση.
- Να υπολογιστεί η πιθανότητα $\mathbb{P}(Y \leq e^{-3})$.

Λύση

- Από την θεωρία γνωρίζουμε ως όταν η συνεχής Τ.Μ. X ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[a, b]$, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π) αυτής θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

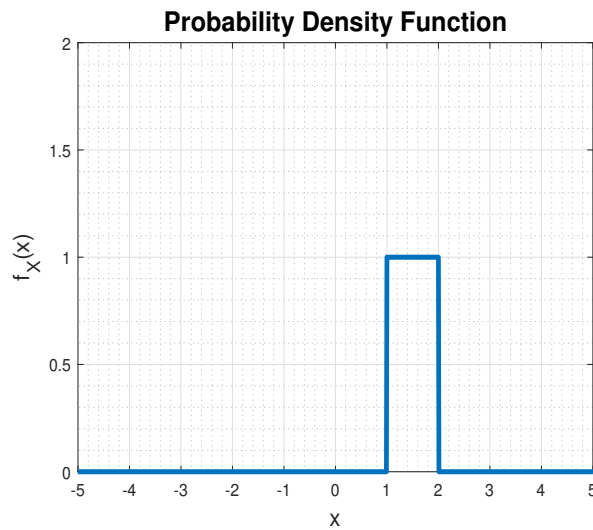
Με βάση την εκφώνηση της Άσκησης, προκύπτει ότι:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Άρα, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα είναι τελικά:

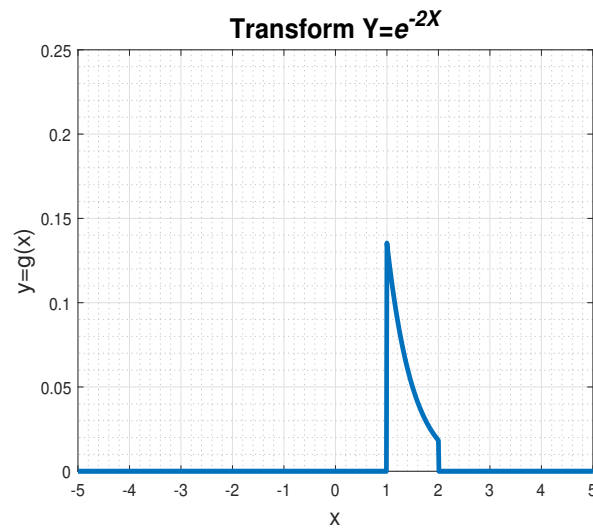
$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της X , $f_X(x)$, φαίνεται στο Σχήμα 7 (περιορισμένη στο διάστημα $[-5, 5]$).



Σχήμα 7: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$.

Η γραφική παράσταση του μετασχηματισμού $Y = g(X)$ φαίνεται στο Σχήμα 8 (περιορισμένη στο διάστημα $[-5, 5]$).



Σχήμα 8: Μετασχηματισμός $Y = g(X)$.

(β) Η Τ.Μ X παίρνει τιμές στο διάστημα $[e^{-4}, e^{-2}] = [0.019448, 0.13534]$. Άρα, θεωρούμε τις εξής περιπτώσεις:

(α') Για $y < e^{-4}$, έχουμε:

$$F_Y(y) = 0$$

(β') Για $e^{-4} \leq y < e^{-2}$, έχουμε:

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(e^{-2X} < y) = P(-2X < \ln y) = P(X > -\frac{1}{2} \ln y) = \int_{-\frac{1}{2} \ln y}^{+\infty} 1 dx = \int_{-\frac{1}{2} \ln y}^2 1 dx = [x]_{-\frac{1}{2} \ln y}^2 = 2 + \frac{1}{2} \ln y$$

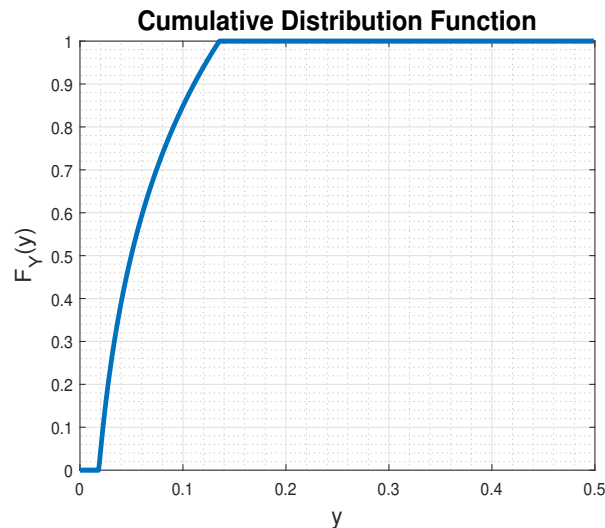
(γ') Για $y > e^{-2}$, έχουμε:

$$F_Y(y) = 1$$

Άρα, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της T.M. Y , $F_Y(y)$, θα είναι τελικά:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < e^{-4} \\ 2 + \frac{1}{2} \ln y & e^{-4} \leq y < e^{-2} \\ 1 & y > e^{-2} \end{cases}$$

Σχεδιάζοντας κάθε κλάδο της $F_Y(y)$ στα αντίστοιχα διαστήματα, λαμβάνουμε την γραφική παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα $[0, 0.5]$) που φαίνεται στο Σχήμα 9.



Σχήμα 9: Αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F_Y(y)$.

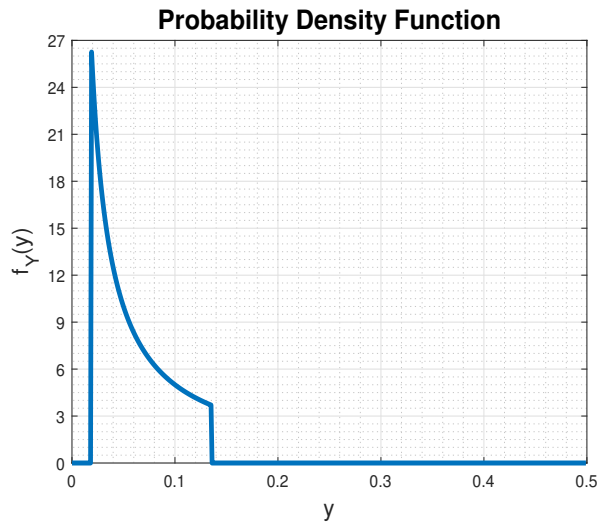
(γ) Με γνωστή την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$$

Με βάση την δοσμένη αθροιστική συνάρτηση κατανομής, έχουμε:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2y} & e^{-4} \leq y < e^{-2} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Σχεδιάζοντας κάθε κλάδο της $f_Y(y)$ στα αντίστοιχα διαστήματα, λαμβάνουμε την γραφική παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα $[0, 0.5]$) που φαίνεται στο Σχήμα 10.



Σχήμα 10: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_Y(y)$.

(δ) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, έχουμε:

$$P(Y \leq e^{-3}) = F_Y(e^{-3}) = 2 + \frac{1}{2} \ln(e^{-3}) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Άσκηση 5

Έστω $X \sim \exp(\lambda)$ μία εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ . Έστω $Y = \lfloor X \rfloor$ το ακέραιο μέρος της X . Δηλαδή, αν $k \leq X < k+1$ τότε $Y = k$ για $k = 0, 1, 2, \dots$

(α) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας της Y . Αναγνωρίστε την κατανομή της τ.μ. Y .

(β) Ορίστε το σφάλμα κβάντισης ως $Z = X - \lfloor X \rfloor$. Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Z .

Λύση

(α) Προφανώς η τ.μ Y παίρνει τιμές $0, 1, 2, 3, \dots$. Είναι διακριτή! Επομένως έχουμε:

$$P_Y(k) = P(Y = k) = P(k < X < k+1) = F_X(k+1) - F_X(k)$$

Όμως, η $X \sim \exp(\lambda)$, με Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής: $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
Συνεπώς ισχύει:

$$P_Y(k) = 1 \cdot e^{-\lambda(k+1)} - (1 - e^{-\lambda k}) = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} = e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda})$$

Παρατηρούμε ότι η τ.μ Y έχει σ.π.π της μορφής:

$$P_Y(k) = (1-p)p^k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad \text{με } p = e^{-\lambda}$$

Δηλαδή, η τ.μ Y ακολουθεί μία μετατοπισμένη γεωμετρική κατανομή $Y = Z - 1$, όπου Z ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με $p = e^{-\lambda}$. $Z \sim \text{Geo}(e^{-\lambda})$.

(β) Προφανώς, $0 \leq Z = X - \lfloor X \rfloor < 1$. Η Z είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με πεδίο τιμών το $[0, 1)$. Για $0 \leq z < 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} E_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(0 \leq Z < z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k \leq X < k+z) = \sum_{k=0}^{\infty} [F_X(k+z) - F_X(k)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [1 - e^{-\lambda(k+z)} - (1 - e^{-\lambda k})] = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+z)}) = \frac{1 - e^{-\lambda z}}{1 - e^{-\lambda}} \end{aligned}$$

Οπότε, η σ.π.π γίνεται:

$$f_Z(z) = \frac{\lambda e^{-\lambda z}}{1 - e^{-\lambda}}$$

Άσκηση 6

- (α) Δύο όργανα χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση της απόστασης μεταξύ δύο σημείων. Η πραγματική απόσταση είναι L . Το σφάλμα μέτρησης ενός οργάνου ορίζεται ως η μέτρηση του οργάνου μείον την πραγματική τιμή της ποσότητας. Το σφάλμα μέτρησης του πρώτου οργάνου ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση $0.006L$, ενώ το σφάλμα μέτρησης του δεύτερου οργάνου ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση $0.004L$. Οι δύο μετρήσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ο μέσος όρος των δύο μετρήσεων βρίσκεται εντός $\pm 0.5\%$ γύρω από την πραγματική απόσταση. Εκφράστε την απάντησή σας βάσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(u)$.
- (β) Οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες (*i.i.d.*) Υπολογίστε το συντελεστή συσχέτισης των τ.μ. $Z = aX + bY$ και $W = aX - bY$, όπου a και b δύο σταθερές.

Λύση

- (α) Έστω X_i η μέτρηση του οργάνου i ($i = 1, 2$) και e_i το αντίστοιχο σφάλμα (εrρορ) της μέτρησης. Τότε $e_i = X_i - L$.

Επίσης, μας δίνεται ότι:

$$e_1 \sim N(0, (0.006L)^2), \quad e_2 \sim N(0, (0.004L)^2)$$

Καθώς οι e_1 και e_2 είναι Γκαουσιανές τ.μ., και οι τ.μ. X_1 και X_2 είναι επίσης Γκαουσιανές:

$$X_1 = e_1 + L \sim N(L, (0.006L)^2), \quad X_2 = e_2 + L \sim N(L, (0.004L)^2)$$

Ο μέσος όρος, Y , των δύο μετρήσεων είναι:

$$Y = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$$

Η Y είναι επίσης Γκαουσιανή ως γραμμικός συνδυασμός ανεξάρτητων Γκαουσιανών:

$$E[Y] = \frac{1}{2}E[X_1] + \frac{1}{2}E[X_2] = \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}L = L$$

$$Var(Y) = \frac{1}{4}Var(X_1) + \frac{1}{4}Var(X_2) = \frac{1}{4}(0.006L)^2 + \frac{1}{4}(0.004L)^2$$

$$\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)} = 0.0036L$$

Άρα,

$$Y \sim N(L, (0.0036L)^2)$$

Μας ζητείται η πιθανότητα:

$$P(|Y - L| \leq 0.005L) = P(-0.005L \leq Y - L \leq 0.005L)$$

$$= P\left(\frac{-0.005L}{0.0036L} \leq \frac{Y - L}{0.0036L} \leq \frac{0.005L}{0.0036L}\right)$$

$$= P(-1.3868 \leq Z \leq 1.3868)$$

Όπου $Z \sim N(0, 1)$. Άρα:

$$P(-1.3868 \leq Z \leq 1.3868) = \Phi(1.3868) - \Phi(-1.3868)$$

$$= 2\Phi(1.3868) - 1$$

(β) Από τις ιδιότητες της συνδιακύμανσης:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Z, W) &= \text{Cov}(aX + bY, aX - bY) \\ &= \text{Cov}(aX, aX) + \text{Cov}(aX, -bY) + \text{Cov}(bY, aX) + \text{Cov}(bY, -bY) \\ &= a^2 \text{Var}(X) - ab \text{Cov}(X, Y) + ab \text{Cov}(X, Y) - b^2 \text{Var}(Y) \\ &= a^2 \text{Var}(X) - b^2 \text{Var}(Y) = (a^2 - b^2) \sigma^2 \end{aligned}$$

Επίσης:

$$\text{Var}(Z) = \text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) = (a^2 + b^2) \sigma^2$$

$$\text{Var}(W) = \text{Var}(aX - bY) = a^2 \text{Var}(X) + (-b)^2 \text{Var}(Y) = (a^2 + b^2) \sigma^2$$

Για ανεξάρτητες X, Y , ισχύει $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Τελικά:

$$\rho_{Z,W} = \frac{\text{Cov}(Z, W)}{\sqrt{\text{Var}(Z) \text{Var}(W)}} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$