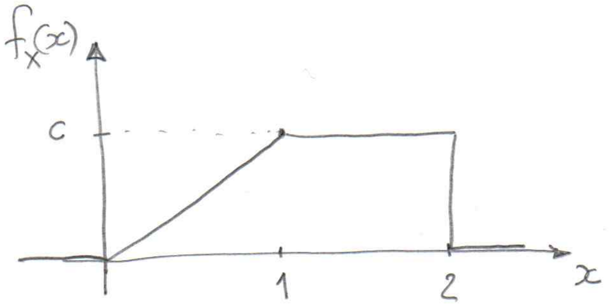
ΗΥ-217 Τελική Εξέταση
21-1-2025

ΘΕΜΑ 1º

(α)



Πρέπει $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 cx\,dx + \int_1^2 c\,dx = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2}cx^2\Big|_0^1 + cx\Big|_1^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}c + c(2-1) = 1 \Rightarrow c = \frac{2}{3}.$

(β) $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^1 \frac{2}{3}x^2\,dx + \int_1^2 \frac{2}{3}x\,dx$

$= \frac{2}{9}x^3\Big|_0^1 + \frac{1}{3}x^2\Big|_1^2 = \frac{2}{9} + \frac{1}{3}(4-1) = \frac{11}{9} = 1.22$

(γ) · Για $x<0$, $F_X(x) = 0$.

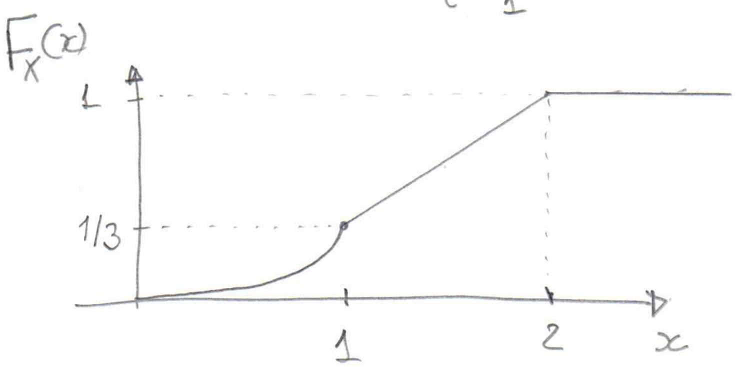
· Για $0 \leq x < 1$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du = \int_0^x \frac{2}{3}u\,du = \frac{u^2}{3}\Big|_0^x = \frac{x^2}{3}.$

· Για $1 \leq x < 2$, $F_X(x) = \int_0^1 \frac{2}{3}u\,du + \int_1^x \frac{2}{3}\,du = \frac{u^2}{3}\Big|_0^1 + \frac{2}{3}u\Big|_1^x$

$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(x-1) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(2x-1).$

· Για $x \geq 2$, $F_X(x) = 1$.

$$\therefore \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ x^2/3 & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3}(2x-1) & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$



(δ) $P(X>1.5 \cup X<0.5) = P(X>1.5) + P(X<0.5)$

$= 1 - P(X \leq 1.5) + P(X<0.5) = 1 - F_X(1.5) + F_X(0.5)$

$= 1 - \frac{1}{3}(2 \times 1.5 - 1) + \frac{0.5^2}{3} = 1 - \frac{1}{3}2 + \frac{1}{12} = \frac{5}{12} = \underline{0.4167}.$

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ 2º}}$ Η τ.μ. $X \sim U[3,5]$. Συνεπώς,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5-3} = \frac{1}{2} & 3 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 3 \\ \frac{x-3}{5-3} & 3 \leq x \leq 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

Η τ.μ. $Y \sim \exp(\lambda = \frac{1}{2})$. Συνεπώς,

$$f_Y(y) = \frac{1}{2} e^{-y/2} \,;\; y \geq 0 \quad , \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 - e^{-y/2} & y \geq 0 \end{cases}$$

(α) Έστω Z η τ.μ. που περιγράφει την τιμή που καταγράψαμε. Από την εκφώνηση έχουμε ότι η δεσμευμένη σ.π.π. της Z δεδομένου ότι έρχεται κορώνα (Κ) είναι $U[3,5]$. Η δεσμευμένη κατανομή της Z δεδομένου ότι έρχονται γράμματα (Γ) είναι $\exp(\lambda = \frac{1}{2})$.

Έστω $A = \{4 < Z < 6\}$. Από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:

$$P(A) = \frac{1}{2} P(A / \text{Κορώνα}) + \frac{1}{2} P(A / \text{Γράμματα})$$

$$= \frac{1}{2} P(4 < X < 6) + \frac{1}{2} P(4 < Y < 6)$$

$$= \frac{1}{2}(F_X(6) - F_X(4)) + \frac{1}{2}(F_Y(6) - F_X(4))$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4-3}{5-3}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - e^{-6/2} - (1 - e^{-4/2})\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(e^{-2} - e^{-3}) = \underline{0.2928}.$$

(β) Bayes: $P(K/A) = \frac{P(K)\, P(A/K)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}(F_X(6) - F_X(4))}{0.2928} =$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{4-3}{5-3}\right)}{0.2928} = \underline{0.8539} \;\square$$

ΘΕΜΑ 3ο Την i-στή ($i=1,2,\dots,200$) φορά που μετακινώ το βίντεο αποσυγχρονίζεται κατά X_i δέκατα του δευτερολέπτου, όπου οι τ.μ. X_i είναι iid Γκαουσιανές:

$$X_i \sim N(0, 1/8)$$

Μας ενδιαφέρει η πιθανότητα το άθροισμα των X_i να ξεπερνά σε απόλυτη τιμή το ένα δευτερόλεπτο:

$$P\left(|Y = \sum_{i=1}^{200} X_i| > 10\right).$$

Η τ.μ. $Y = \sum_{i=1}^{200} X_i$ ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή ως άθροισμα ανεξάρτητων Γκαουσιανών τ.μ. Η μέση τιμή και διασπορά της Y είναι:

$$E[Y] = \sum_{i=1}^{200} E[X_i] = 200 \cdot 0 = 0$$

$$\mathrm{var}(Y) = \mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^{200} X_i\right) = \sum_{i=1}^{200} \mathrm{var}(X_i) \quad [\text{επειδή οι } X_i \text{ είναι ανεξάρτητες}]$$

$$= 200 \cdot \frac{1}{8} = 200/8$$

$$\therefore \quad Y \sim N(0, 200/8)$$

Ζητάμε: $P(|Y|>10) = 1 - P(|Y| \le 10) =$

$$= 1 - P(-10 \le Y \le 10)$$

$$= 1 - P\left(\frac{-10-0}{\sqrt{200/8}} \le \frac{Y-0}{\sqrt{200/8}} \le \frac{10-0}{\sqrt{200/8}}\right)$$

$$= 1 - \left[\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{200/8}}\right) - \Phi\left(-\frac{10}{\sqrt{200/8}}\right)\right]$$

$$= 1 - [\Phi(2) - \Phi(-2)] = 1 - [\Phi(2) - (1-\Phi(2))]$$

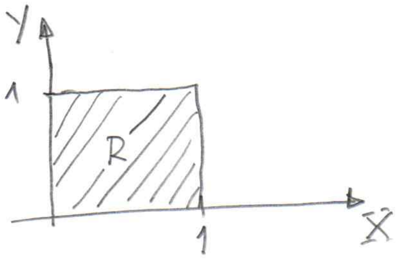
$$= 2(1-\Phi(2)) = \underline{0.0456}.$$

□

ΘΕΜΑ 4ο (α) Εφόσον οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες με κοινή ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0,1]$ η από κοινού σ.π.π. τους προκύπτει ως:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) = 1\cdot 1 = 1 \quad \text{για } (x,y)\in R=[0,1]\times[0,1]$$

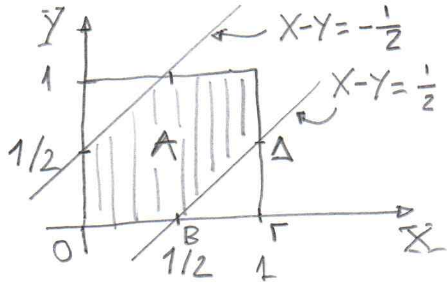
και $f_{X,Y}(x,y)=0$ αλλού.



$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} 1 & R: 0\le x,y\le 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

(β) Ζητάμε την πιθανότητα $P(|X-Y|<\frac{1}{2}) = P(-\frac{1}{2}<X-Y<\frac{1}{2}) =$

$$= P((X,Y)\in A) = E_A\cdot 1$$



καθώς η από κοινού σ.π.π. είναι σταθερή (ίση με 1) πάνω από το χωρίο A. Το εμβαδό E_A ισούται με το εμβαδό του R πλην δύο φορές το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΔ:

$$E_A = 1-2E_{ΒΓΔ} = 1-2\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Συνεπώς, $P(|X-Y|<\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}\cdot 1 = \underline{0.75}$.

(γ) $Z = 20X+10Y$

$X,Y \sim U[0,1] \Rightarrow E[X]=E[Y]=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$

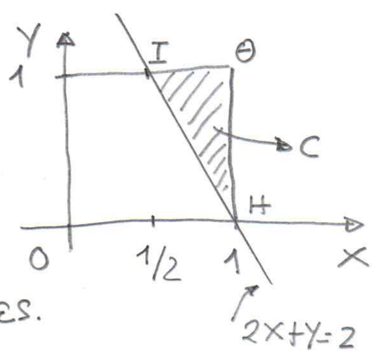
$var(X)=var(Y)=\frac{(1-0)^2}{12}=\frac{1}{12}$

Συνεπώς, $E[Z] = 20E[X]+10E[Y] = 20\frac{1}{2}+10\frac{1}{2} = \underline{15}$

$var(Z) = 20^2 var(X) + 10^2 var(Y) = 400\frac{1}{12}+100\frac{1}{12} = \frac{500}{12} = \frac{125}{3} = \underline{41.67}$

(δ) $P(Z>20) = P(20X+10Y>20) = P(2X+Y>2)$

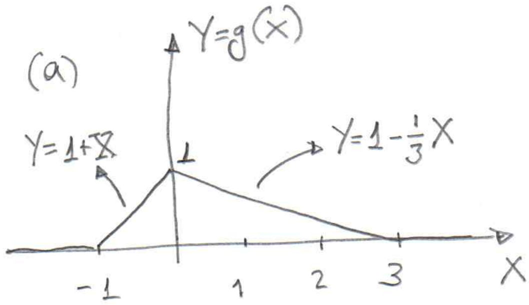
$= P((X,Y)\in C) = E_{ΗΘΙ}\cdot 1 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{4} = \underline{0.25}$

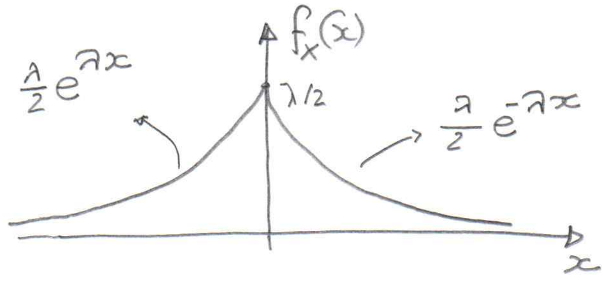


(ε) $cov(X,Y)=0$ καθώς οι X,Y είναι ανεξάρτητες.

ΘΕΜΑ 5ο

(α)

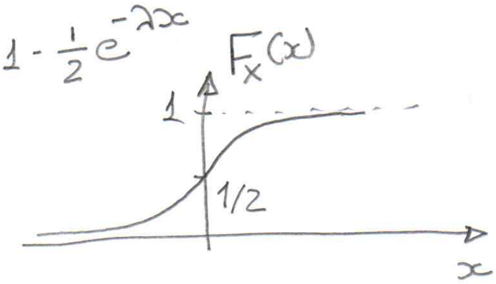




(β) Για $x<0$, $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(u)du=\int_{-\infty}^{x}\frac{\lambda}{2}e^{\lambda u}du=\frac{1}{2}e^{\lambda u}\Big|_{-\infty}^{x}=\frac{1}{2}e^{\lambda x}$

Για $x\geq 0$, $F_X(x)=\int_{-\infty}^{0}\frac{\lambda}{2}e^{\lambda u}du+\int_{0}^{x}\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda u}du=\frac{1}{2}e^{\lambda u}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{2}e^{-\lambda u}\Big|_{0}^{x}$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(e^{-\lambda x}-1\right)=1-\frac{1}{2}e^{-\lambda x}$



$\therefore F_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{\lambda x}, & x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-\lambda x}, & x\geq 0\end{cases}$

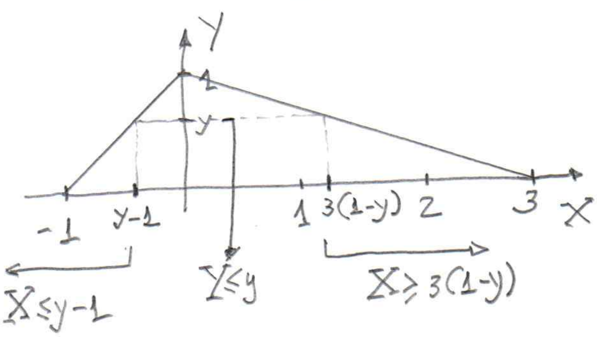
(γ) $P(Y=0)=P(X\leq -1\cup X\geq 3)=P(X\leq -1)+P(X\geq 3)=P(X\leq -1)+1-P(X<3)$

$=F_X(-1)+1-F_X(3)=\frac{1}{2}e^{-\lambda}+1-\left(1-\frac{1}{2}e^{-3\lambda}\right)=\underline{\frac{1}{2}e^{-\lambda}+\frac{1}{2}e^{-3\lambda}}$

(δ) · Για $y<0$, $F_Y(y)=0$

· Για $y\geq 1$, $F_Y(y)=1$

· Για $0\leq y<1$, $F_Y(y)=P(Y\leq y)$

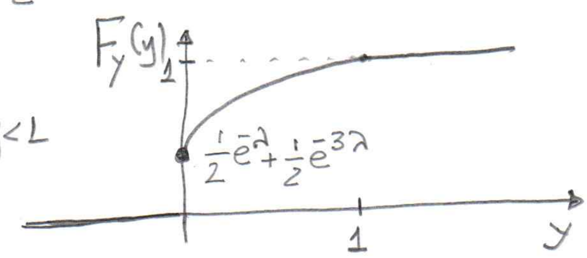


$=P(X\leq y-1\cup X\geq 3(1-y))$

$=P(X\leq y-1)+P(X\geq 3(1-y))=F_X(y-1)+1-F_X(3(1-y))$

$=\frac{1}{2}e^{\lambda(y-1)}+1-\left(1-\frac{1}{2}e^{-3\lambda(1-y)}\right)=\frac{1}{2}e^{-\lambda(1-y)}+\frac{1}{2}e^{-3\lambda(1-y)}$

$\therefore F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{1}{2}e^{-\lambda(1-y)}+\frac{1}{2}e^{-3\lambda(1-y)}, & 0\leq y<1\\ 1, & y\geq 1\end{cases}$



(ε) Η τ.μ. Y είναι μικτή. Παίρνει συνεχείς τιμές στο διάστημα $(0,1]$ με σ.π.π.

$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda(1-y)}+\frac{3}{2}e^{-3\lambda(1-y)}, \quad 0<y\leq 1$

Παίρνει την τιμή $Y=0$ με πιθανότητα $P(Y=0)=\frac{1}{2}e^{-\lambda}+\frac{1}{2}e^{-3\lambda}$.

$\square$