

**Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών**  
**Θεωρία Πιθανοτήτων - Τελική Εξέταση**  
**Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης**  
**21 Ιανουαρίου 2025 - Διάρκεια: 3 Ώρες**

**Θέμα 1 - 20 μονάδες. Μία απλή συνεχής τ.μ.**

Μία συνεχής τυχαία μεταβλητή (τ.μ.)  $X$  έχει την ακόλουθη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ cx, & 0 \leq x \leq 1, \\ c, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & x > 2, \end{cases}$$

όπου  $c$  είναι μία σταθερά.

- (α) Να δώσετε τη γραφική παράσταση της σ.π.π. και να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς  $c$ .
- (β) Υπολογίστε τη μέση τιμή,  $E[X]$ , της τ.μ.  $X$ .
- (γ) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής,  $F_X(x)$ , της τ.μ.  $X$  και δώστε τη γραφική παράστασή της.
- (δ) Υπολογίστε την πιθανότητα η τ.μ.  $X$  να παίρνει τιμές μεγαλύτερες από 1.5 ή μικρότερες από 0.5.

**Θέμα 2 - 20 μονάδες. Συνεχείς τ.μ., ΘΟΠ και κανόνας του Bayes**

Η συνεχής τ.μ.  $X$  ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $[3, 5]$ ,  $X \sim U[3, 5]$ . Η τ.μ.  $Y$  ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή 2. Ρίχνουμε ένα δίκαιο νόμισμα, και αν έρθει κορώνα καταγράφουμε την τιμή της  $X$ , ενώ αν έρθουν γράμματα καταγράφουμε την τιμή της  $Y$ .

- (α) Υπολογίστε την πιθανότητα η τιμή που καταγράψαμε να είναι μεγαλύτερη από 4 και μικρότερη από 6.
- (β) Αν η τιμή που καταγράψαμε είναι μεγαλύτερη από 4 και μικρότερη από 6, ποια είναι η πιθανότητα να έχει έρθει κορώνα;

**Θέμα 3 - 20 μονάδες. Γκαουσιανή Κατανομή.**

Αποσυγχρονισμός. Έστω πως βλέπω ένα streaming βίντεο στον υπολογιστή μου, και παρατηρώ ότι, κάθε φορά που αποφασίζω να το πάω πιο μπροστά ή πιο πίσω, αποσυγχρονίζεται ο ήχος με την εικόνα κατά  $X$  δέκατα του δευτερολέπτου (ανεξάρτητα από τη μία φορά στην άλλη), όπου η τ.μ.  $X$  ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά  $1/8$ ,  $X \sim N(0, 1/8)$ . Αν μετακινήσω το σημείο που βλέπω στο βίντεο 200 φορές, ποια είναι η πιθανότητα να έχει αποσυγχρονιστεί συνολικά ο ήχος περισσότερο από  $\pm 1$  δευτερόλεπτο; Δίδεται ότι  $\Phi(2) = 0.9772$ .

**Θέμα 4 - 25 μονάδες. Από κοινού κατανομές.**

Χρόνοι διεργασιών. Δύο διεργασίες που πραγματοποιούνται σε ένα δίκτυο επεξεργαστών είναι προγραμματισμένες έτσι ώστε να τελειώσουν ταυτόχρονα και σε μια συγκεκριμένη ώρα. Έστω  $X, Y$  οι χρόνοι καθυστέρησης του τερματισμού τους, σε δευτερόλεπτα, όπου οι συνεχείς τ.μ.  $X, Y$  είναι ανεξάρτητες και ομοιόμορφα κατανεμημένες από το 0 ως το 1.

- (α) Υπολογίστε και δώστε τη γραφική παράσταση της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας,  $f_{X,Y}(x, y)$ , των τ.μ.  $X$  και  $Y$ .
- (β) Ποια είναι η πιθανότητα η διαφορά στους χρόνους τερματισμού, δηλαδή το  $|X - Y|$ , να είναι λιγότερο από μισό δευτερόλεπτο;
- (γ) Η καθυστέρηση στον τερματισμό των διεργασιών έχει κόστος  $Z = 20X + 10Y$  ευρώ. Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά του κόστους που προκύπτει κάθε φορά που εκτελούνται;
- (δ) Ποια είναι η πιθανότητα το κόστος να ξεπερνά τα 20 ευρώ;
- (ε) Υπολογίστε τη συνδιασπορά των τ.μ.  $X$  και  $Y$ ,  $cov(X, Y)$ .

**Θέμα 5 - 25 μονάδες. Μετασχηματισμοί Τυχαίων Μεταβλητών.**

Η τ.μ.  $X$  ακολουθεί την κατανομή Laplace με σ.π.π.

$$f_X(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}, \quad -\infty < x < \infty,$$

όπου  $\lambda > 0$  είναι παράμετρος της κατανομής.

Μετασχηματίζουμε την τ.μ.  $X$  ως εξής:

$$Y = g(X) = \begin{cases} X + 1, & -1 \leq X < 0, \\ 1 - \frac{1}{3}X, & 0 \leq X < 3, \\ 0, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

- (α) Δώστε τη γραφική παράσταση του μετασχηματισμού  $Y = g(X)$  καθώς και τη γραφική παράσταση της σ.π.π.,  $f_X(x)$ , της τ.μ.  $X$ .
- (β) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής,  $F_X(x)$ , της τ.μ.  $X$ .
- (γ) Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος  $\{Y = 0\}$ .
- (δ) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής,  $F_Y(y)$ , και δώστε τη γραφική της παράσταση.
- (ε) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας,  $f_Y(y)$ , της τ.μ.  $Y$ . Τι είδους τ.μ. είναι η  $Y$ , διακριτή, συνεχής ή μικτή;