

25-11-2023

ΘΕΜΑ 1^ο

$$\begin{aligned} (a) \quad 1 - P(A \cup B^c) &= P((A \cup B^c)^c) \\ &= P(A^c \cap B) \quad [\text{De Morgan}] \\ &= P(B) - P(A \cap B) \quad [\text{Διαφορά των } A \text{ από το } B] \end{aligned}$$

$$(b) \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} \leq \frac{P(B|A)}{P(B)} \quad [\text{καθώς } P(A) \leq 1]$$

$$\begin{aligned} (γ) \quad P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \quad [A, B: \text{ανεξάρτητα}] \\ &= P(A) + P(B)(1 - P(A)) \\ &= P(A) + P(B)P(A^c) \end{aligned}$$

$$(δ) \quad 0 \leq \text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 \Rightarrow E[X^2] \geq (E[X])^2.$$

ΘΕΜΑ 2^ο

(a) Σε μια καλά ανακατωμένη τράπουλα, οποιοδήποτε από τα 52 φύλλα της έχει την ίδια πιθανότητα να βρισκεται στην κορυφή. Καθώς υπάρχουν 4 άσσοι, η πιθανότητα το πρώτο φύλλο να είναι άσος είναι $4/52 = 1/13 = 0.0769$.

(β) Δεδομένου ότι το πρώτο φύλλο είναι άσος, στα 51 εναπομείναντα φύλλα υπάρχουν 4 ρηγάδες. Επομένως η ζητούμενη δεσφωμένη πιθανότητα είναι $4/51 = 0.0784$.

(γ) Υπάρχουν $\binom{52}{7}$ τρόποι να επιλέξουμε 7 φύλλα από την τράπουλα.

Έστω $A = \left\{ \begin{array}{l} \text{τα 7 φύλλα περιέχουν ακριβώς 3 άσους} \\ \text{"-"} \text{ 2 ρηγάδες} \end{array} \right\}$

$B = \{$

"-"

(γ-ι) Υπάρχουν $\binom{4}{3}$ τρόποι να επιλέξουμε 3 από τους 4 άσους ② της τράπουλας. Στη συνέχεια, από τα υπόλοιπα 48 φύλλα που δεν είναι άσοι υπάρχουν $\binom{48}{4}$ τρόποι να επιλέξουμε τα 4. Επομένως, υπάρχουν $\binom{4}{3}\binom{48}{4}$ τρόποι να επιλέξουμε 7 φύλλα με 3 άσους.

$$P(A) = \frac{\binom{4}{3}\binom{48}{4}}{\binom{52}{7}} = 0.0058$$

(γ-ii) Με ανάλογο σκεπτικό,

$$P(B) = \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{5}}{\binom{52}{7}} = 0.0768$$

(γ-iii) Μας ζητείται η $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 $A \cap B = \{ \text{τα 7 φύλλα περιέχουν ακριβώς 3 άσους και 2 ρηγάδες} \}$
 Υπάρχουν $\binom{4}{3}$ τρόποι να επιλέξουμε 3 από τους 4 άσους,
 $\binom{4}{2}$ τρόποι να επιλέξουμε 2 από τους 4 ρηγάδες και $\binom{44}{2}$ τρόποι να επιλέξουμε 2 από τα υπόλοιπα 44 φύλλα.
 Συνεπώς, $P(A \cap B) = \frac{\binom{4}{3}\binom{4}{2}\binom{44}{2}}{\binom{52}{7}} = 0.0002$

Τελικά $P(A \cup B) = 0.0058 + 0.0768 - 0.0002 = \underline{0.0823}$

ΘΕΜΑ 3° Έστω $K = \{ \text{το κέρμα έφερε κεφαλή} \}$ $P(K) = P(\Gamma) = \frac{1}{2}$.
 $\Gamma = \{ \text{"-"} \}$ χρόνιατα

Από την εκφώνηση δίδεται ότι:

$$P(T_1/K) = \frac{5}{6}, \quad P(T_1/\Gamma) = \frac{3}{6}$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Bayes ή τονόμωτος (Θαη), έχουμε:

$$(a) \quad P(T_n) = P(K)P(T_n|K) + P(r)P(T_n|r) \\ = \frac{1}{2} \frac{5}{6} + \frac{1}{2} \frac{3}{6} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} = 0.6667$$

$$(b) \quad P(T_n \cap T_{n+1}) = P(K)P(T_n \cap T_{n+1}|K) + P(r)P(T_n \cap T_{n+1}|r) \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{17}{36} = 0.4722$$

(γ) μας ζητείται η δεσφευμένη πιθανότητα

$$P(T_{n+1} / T_1 \cap T_2 \cap \dots \cap T_n) = \frac{P(T_1 \cap T_2 \cap \dots \cap T_n \cap T_{n+1})}{P(T_1 \cap T_2 \cap \dots \cap T_n)}$$

$$P(T_1 \cap \dots \cap T_n) = P(K)P(T_1 \cap \dots \cap T_n|K) + P(r)P(T_1 \cap \dots \cap T_n|r) \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{6}\right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{6}\right)^n$$

$$\text{Ομοίως } P(T_1 \cap \dots \cap T_n \cap T_{n+1}) = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{6}\right)^{n+1}$$

$$\text{Συνεπώς, } P(T_{n+1} / T_1 \cap \dots \cap T_n) = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} + \left(\frac{3}{6}\right)^{n+1}}{\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{3}{6}\right)^n}$$

Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με το $(6/5)^n$.

$$P(T_{n+1} / T_1 \cap \dots \cap T_n) = \frac{\frac{5}{6} + \frac{3}{6} \left(\frac{3}{5}\right)^n}{1 + \left(\frac{3}{5}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{5}{6}$$

Το παραπάνω όριο ερμηνεύεται ως εξής. Αφού οι η πρώτες ρίψεις έφεραν κόκκινο είναι πιο πιθανό να ρίχνουμε το j αρι A να έχω μεγαλύτερη πιθανότητα να φέρω κόκκινο. Επομένως και η $(n+1)$ -στή ρίψη θα φέρω κόκκινο με πιθανότητα $5/6$!!

$$(δ) \quad P(K / T_1 \cap \dots \cap T_n) = \frac{P(K) \cdot P(T_1 \cap \dots \cap T_n|K)}{P(T_1 \cap \dots \cap T_n)} \quad [\text{Bayes}]$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{5}{6}\right)^n}{\frac{1}{2} \left(\frac{5}{6}\right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{6}\right)^n} = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n}{\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{3}{6}\right)^n} = \frac{1}{1 + \left(\frac{3}{5}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Πρόφανως: Αφού οι η πρώτες ρίψεις έφεραν κόκκινο με πιθανότητα ~ 1 έχουμε φέρει K (και επιλέγει το j αρι A !!)

ΘΕΜΑ 4ο

(4)

(α)

Έστω X το πηχός των κερδών στις 5 ρίψεις
του κέρματος. Προφανώς, η τ.φ. X είναι Διωνυμική
με παραμέτρους $n=5$ και $p=0.4$:

$$P_X(k) = \binom{5}{k} (0.4)^k (0.6)^{5-k}; \quad k=0,1,2,3,4,5.$$

$$E[X] = np = 5 \times 0.4 = 2$$

$$\text{var}(X) = np(1-p) = 5 \times 0.4 \times 0.6 = 1.2$$

(β) Σύμφωνα με τη στρατηγική (i), το κέρδος της μερίδας είναι X .
-||- (ii), -||- -||- $Y = X^2 - 2X$.

Έχουμε ήδη από το (α) ότι: $E[X] = 2$, $\text{var}(X) = 1.2$

$$E[Y] = E[X^2 - 2X] = E[X^2] - 2E[X]$$

$$= \text{var}(X) + (E[X])^2 - 2E[X]$$

$$= np(1-p) + (np)^2 - 2np = 5 \times 0.4 \times 0.6 + (5 \times 0.4)^2 - 2 \times 5 \times 0.4$$

$$\therefore E[Y] = 1.2 < 2 = E[X]$$

Και συνεπώς η στρατηγική (i) είναι πιο ευφέρουσα.

(γ) Στη γενική περίπτωση,

$$E[X] > E[Y] \Rightarrow np > np(1-p) + (np)^2 - 2np$$

$$\Leftrightarrow np - np + np^2 - (np)^2 + 2np > 0$$

$$\Leftrightarrow 5p^2 - 25p^2 + 10p > 0$$

$$\Leftrightarrow -20p^2 + 10p > 0$$

$$\Leftrightarrow p(1-2p) > 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{0 < p < \frac{1}{2}}$$

	0	1/2	
			→
p	-	+	+
$1-2p$	+	+	-

ΘΕΜΑ 5:

(α) Από την έκφραση της από κοινού β.π., υπάρχουν έξι

5

γεωγραφία τιμών (x,y) που εμφανίζονται με μη μηδενικές πιθανότητες, συγκεκριμένα τα: $(1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (4,1)$ και $(4,3)$.

Πρέπει $\sum_x \sum_y P_{x,y}(x,y) = 1$. Συνεπώς:

$$(1^2+1^2)c + (1^2+3^2)c + (2^2+1^2)c + (2^2+3^2)c + (4^2+1^2)c + (4^2+3^2)c = 1$$

$$\Rightarrow 2c + 10c + 5c + 13c + 17c + 25c = 1$$

$$\Rightarrow 72c = 1 \Rightarrow \underline{c = 1/72}$$

Ο πίνακας με τις τιμές της από κοινού β.π. είναι:

$Y \backslash X$	1	2	4	$P_Y(y)$
1	$2/72$	$5/72$	$17/72$	$24/72$
3	$10/72$	$13/72$	$25/72$	$48/72$
$P_X(x)$	$12/72$	$18/72$	$42/72$	

$$(β) P_X(x) = \sum_y P_{x,y}(x,y) = \begin{cases} 12/72, & x=1 \\ 18/72, & x=2 \\ 42/72, & x=4 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$P_Y(y) = \sum_x P_{x,y}(x,y) = \begin{cases} 24/72, & y=1 \\ 48/72, & y=3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$(α) P(Y < X) = P(\{(2,1)\}) + P(\{(4,1)\}) + P(\{(4,3)\})$$

$$= 5/72 + 17/72 + 25/72 = 47/72 = 0.6528$$

$$(β) P(Y=3/X=2) = \frac{P(X=2, Y=3)}{P(X=2)} = \frac{P_{x,y}(2,3)}{P_X(2)} = \frac{13/72}{18/72} = \frac{13}{18} = 0.7222$$

$$(γ) A = \{X \geq Y\} = \{(1,1), (2,1), (4,1), (4,3)\}$$

$$P(A) = P_{x,y}(1,1) + P_{x,y}(2,1) + P_{x,y}(4,1) + P_{x,y}(4,3) = \frac{2}{72} + \frac{5}{72} + \frac{17}{72} + \frac{25}{72} = \frac{49}{72} = 0.6806$$

Για τον υπολογισμό της $E[X/A]$ χρειαζόμαστε την

$$P_{X/A}(x) \quad P_{X/A}(1) = \frac{P(\{X=1\} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\{(1,1)\})}{P(A)} = \frac{2/72}{49/72} = \frac{2}{49}$$

$$P_{X/A}(2) = \frac{P(\{X=2\} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\{(2,1)\})}{P(A)} = \frac{5/72}{49/72} = \frac{5}{49}$$

$$P_{X/A}(4) = \frac{P(\{X=4\} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\{(4,1)\}) + P(\{(4,3)\})}{P(A)} = \frac{17/72 + 25/72}{49/72} = \frac{42}{49}$$

$$\therefore E[X/A] = \sum_x x P_{X/A}(x) = 1 \cdot \frac{2}{49} + 2 \cdot \frac{5}{49} + 4 \cdot \frac{42}{49} = \frac{180}{49} = 3.6735$$

□