

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Πρόοδος
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
25 Νοεμβρίου 2023 - Διάρκεια: 2.5 Ώρες

Θέμα 1 - 20 μονάδες. Βασικές Έννοιες

Στις επόμενες τέσσερις προτάσεις, αντικαταστήστε το **vs.** με κάποιο από τα σύμβολα $=$, $\leq$, $\geq$. Αιτιολογήστε κάθε φορά την απάντησή σας.

(α) $1 - P(A \cup B^c)$ vs. $P(B) - P(A \cap B)$.

(β) $P(A/B)$ vs. $\frac{P(B/A)}{P(B)}$.

(γ) $P(A \cup B)$ vs. $P(A) + P(B)P(A^c)$ όταν τα A και B είναι ανεξάρτητα.

(δ) $E[X^2]$ vs. $(E[X])^2$.

Θέμα 2 - 20 μονάδες. Συνδυαστική

Ο καλός σας φίλος τοποθετεί μία ανακατωμένη τράπουλα 52 φύλλων μπροστά σας, πάνω στο τραπέζι. Ως γνωστόν, μία τράπουλα περιέχει 4 άσσους και 4 ρηγάδες.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα το πάνω φύλλο να είναι άσσος.

(β) Κάνουμε το εξής: Επιλέγουμε ένα φύλλο, το κοιτάμε και το βάζουμε στην άκρη. Στη συνέχεια επιλέγουμε ένα ακόμα φύλλο. Ποια η πιθανότητα το δεύτερο φύλλο να είναι ρήγας δεδομένου ότι το πρώτο ήταν άσσος;

(γ) Επιλέγουμε 7 φύλλα από την τράπουλα.

(i) Ποια η πιθανότητα να περιέχουν 3 άσσους;

(ii) Ποια η πιθανότητα να περιέχουν 2 ρηγάδες;

(iii) Ποια η πιθανότητα να περιέχουν 3 άσσους ή 2 ρηγάδες;

Θέμα 3 - 25 μονάδες. Ολική πιθανότητα και Bayes

Το *δίκαιο* εξάεδρο ζάρι A έχει 5 πλευρές του βαμμένες κόκκινες και μία πλευρά του βαμμένη πράσινη. Το *δίκαιο* εξάεδρο ζάρι B έχει 3 πλευρές του βαμμένες κόκκινες και 3 πλευρές του βαμμένες πράσινες. Ρίχνουμε πρώτα ένα *δίκαιο* κέρμα. Αν έρθει κεφαλή, συνεχίζουμε το παιχνίδι ρίχνοντας συνεχώς αποκλειστικά το ζάρι A . Αν έρθουν γράμματα, συνεχίζουμε το παιχνίδι ρίχνοντας συνεχώς αποκλειστικά το ζάρι B . Ορίζουμε το γεγονός $T_n = \{\text{Η } n\text{-στή ρίψη του ζαριού φέρνει κόκκινη πλευρά}\}$.

(α) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας, υπολογίστε την πιθανότητα η n -στή ρίψη του ζαριού να φέρει κόκκινη πλευρά.

(β) Ομοίως, υπολογίστε την πιθανότητα τόσο η n -στή όσο και η $(n+1)$ -στή ρίψεις του ζαριού να φέρουν κόκκινη πλευρά.

(γ) Αν οι n πρώτες ρίψεις του ζαριού έφεραν κόκκινο, υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα η $(n+1)$ -στή ρίψη να φέρει κόκκινο. Ερμηνεύστε το όριο καθώς το n τείνει στο άπειρο.

(δ) Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Bayes, υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα να έχει επιλεγεί το ζάρι A δεδομένου ότι οι n πρώτες ρίψεις έφεραν κόκκινο. Ερμηνεύστε το όριο καθώς το n τείνει στο άπειρο.

Θέμα 4 - 25 μονάδες. Δοκιμές Bernoulli και συναρτήσεις τ.μ.

Μια φθινοπωρινή μέρα στο Ηράκλειο, δύο συμφοιτήτριες και συγγάμοι, η Μελίνα και η Αναστασία, αποφασίζουν να παίξουν το εξής παιχνίδι. Η Μελίνα θα ρίξει διαδοχικά 5 φορές ένα κέρμα (πιθανότητα κεφαλής ίση με 0.4). Πριν τις ρίψεις θα πρέπει να αποφασίσει μεταξύ δύο επιλογών: i) να κερδίσει σε ευρώ ποσό, X , ίσο με το πλήθος των κεφαλών που θα φέρει, ή ii) να κερδίσει σε ευρώ ποσό, Y , ίσο με το τετράγωνο του πλήθους των κεφαλών μείον 2 φορές το πλήθος των κεφαλών που θα φέρει.

(α) Ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X , η μέση τιμή και η διασπορά της;

(β) Ποια είναι η πιο συμφέρουσα στρατηγική για την Μελίνα; Δηλαδή, ποια στρατηγική μεγιστοποιεί το μέσο αναμενόμενο κέρδος της;

(γ) Στη γενική περίπτωση όπου η πιθανότητα να έρθει κεφαλή είναι ίση με p , για ποιο εύρος τιμών του p είναι πιο συμφέρουσα η στρατηγική i) από την ii); Το πλήθος των ρίψεων παραμένει ίσο με 5.

Θέμα 5 - 25 μονάδες. Από κοινού κατανομές

Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) δύο τυχαιών μεταβλητών X και Y δίδεται από την παρακάτω σχέση:

$$p_{X,Y}(x) = \begin{cases} c(x^2 + y^2) & \text{αν } x \in \{1, 2, 4\} \text{ και } y \in \{1, 3\}, \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

(α) Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς c και δώστε τον πίνακα με τις τιμές της από κοινού σ.π. των τ.μ. X και Y .

(β) Υπολογίστε τις οριακές κατανομές, $p_X(x)$ και $p_Y(y)$, των τ.μ. X και Y , αντίστοιχα.

(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα η τ.μ. Y να παίρνει τιμές μικρότερες από την τ.μ. X .

(δ) Υπολογίστε την δεσμευμένη πιθανότητα $P(Y = 3|X = 2)$.

(ε) Έστω A το γεγονός $\{X \geq Y\}$. Υπολογίστε τη δεσμευμένη μέση τιμή $E[X|A]$.