

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 6

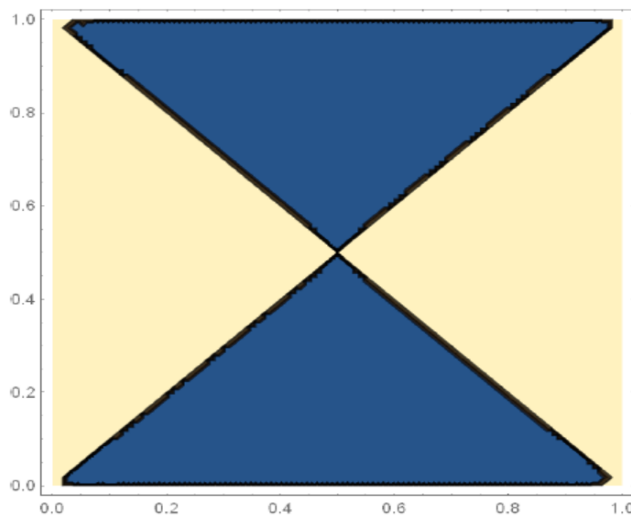
Άσκηση 1.

Οι συνεχείς τ.μ. X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c, & \max(x, 1-x) < y < 1, \quad 0 < x < 1 \\ c, & 0 < y < \min(x, 1-x), \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- (i) Να σχεδιάσετε το επίπεδο (x, y) και να προσδιορίσετε την περιοχή στην οποία ισχύει $f_{XY}(x, y) \neq 0$.
- (ii) Να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς c .
- (iii) Να υπολογίσετε την περιθωριακή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_Y(y)$ και τη μέση τιμή της τ.μ. Y .

Λύση:



Σχήμα 1: Η ζητούμενη γραφική παράσταση στο ερώτημα 1 (i).

- (i) Η περιοχή στην οποία η $f_{XY}(x, y)$ παίρνει τιμή διάφορη του 0 είναι τα γραμμοσκιασμένα τρίγωνα στο σχήμα 1.
- (ii) Πρέπει να ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = 1 \Rightarrow c \cdot E_1 + c \cdot E_2 = 1 \Rightarrow c \cdot \frac{1}{4} + c \cdot \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow c = 2.$$

Εναλλακτικά:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx dy &= 1 \Rightarrow \\
 \int_0^{\frac{1}{2}} \int_y^{1-y} c \cdot dx dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{1-y}^y c \cdot dx dy &= 1 \Rightarrow \\
 c \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2y) dy + c \int_{\frac{1}{2}}^1 (2y-1) dy &= 1 \Rightarrow \\
 c\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + c\left(0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) &= 1 \Rightarrow \\
 \frac{c}{2} &= 1 \Rightarrow \\
 c &= 2.
 \end{aligned}$$

(iii) Για $y \leq \frac{1}{2}$ έχουμε

$$f_Y(y) = \int_0^1 f_{XY}(x, y) dx = \int_y^{1-y} 2 dx = 2(1-2y).$$

Για $\frac{1}{2} < y < 1$ έχουμε

$$f_Y(y) = \int_0^1 f_{XY}(x, y) dx = \int_{1-y}^y 2 dx = 2(2y-1).$$

Οπότε

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-2y), & 0 < y \leq \frac{1}{2} \\ 2(2y-1), & \frac{1}{2} < y < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 E[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} y 2(1-2y) dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 y 2(2y-1) dy \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{4}{3} - 1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Άσκηση 2.

Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές X και Y με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(2x+y), & 2 < x < 6, 0 < y < 5 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- α) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c .
- β) Να βρεθούν οι περιθωριακές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. X και Y .
- γ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(3 < X < 4, Y > 2)$
- δ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X > 3)$
- ε) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X + Y > 4)$
- στ) Είναι οι X και Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές;

Λύση:

α) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \int_2^6 \int_0^5 c(2x+y) dy dx &= 1 \\ \int_2^6 c \left[2xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^5 dx &= \int_2^6 c(10x + \frac{25}{2}) dx = 210c = 1 \\ c &= \frac{1}{210} \end{aligned}$$

β) Οι περιθωριακές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X και Y γίνονται:

$$f_X(x) = \int_0^5 f_{X,Y}(x,y) dy = \int_0^5 \frac{2x+y}{210} dy = \frac{1}{210} \left[2xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^5 = \frac{1}{210} (10x + \frac{25}{2})$$

και

$$f_Y(y) = \int_2^6 f_{X,Y}(x,y) dx = \int_2^6 \frac{2x+y}{210} dx = \frac{1}{210} \left[2 \frac{x^2}{2} + yx \right]_2^6 = \frac{1}{210} (32 + 4y)$$

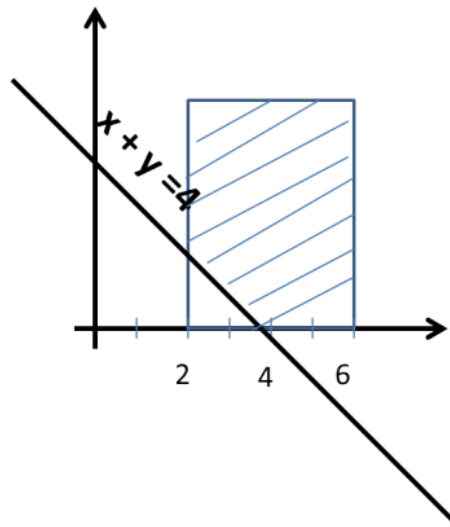
γ) Η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$P(3 < X < 4, Y > 2) = \frac{1}{210} \int_3^4 \int_2^5 (2x+y) dy dx = \frac{3}{20}$$

δ) Η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$P(X > 3) = \frac{1}{210} \int_3^6 \int_0^5 (2x+y) dy dx = \frac{23}{28}$$

ε) Η ζητούμενη πιθανότητα προκύπτει από το Σχήμα 2



Σχήμα 2: Σχήμα άσκησης 2ε)

$$P(X + Y > 4) = 1 - P(X + Y \leq 4) = 1 - \frac{1}{210} \int_2^4 \int_0^{4-x} (2x + y) dy dx = 1 - \frac{2}{35} = \frac{33}{35}$$

στ) Παρατηρούμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές X, Y δεν είναι ανεξάρτητες, εφόσον $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$.

Άσκηση 3. Θεωρούμε τη συνεχή ομοιόμορφη τ.μ. X για την οποία γνωρίζουμε ότι $E[X] = \frac{1}{2}$ και $\text{var}(X) = \frac{25}{12}$. Η Τ.Μ. είναι είσοδος σε ένα σύστημα εισόδου-εξόδου που δίνεται από τον μετασχηματισμό $Y = X^2$.

- (i) Να υπολογίσετε την αναλυτική έκφραση για την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) της Τ.Μ. X , και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.
- (ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση του μετασχηματισμού $Y = X^2$, και να δώσετε το πεδίο τιμών της Τ.Μ. Y .
- (iii) Για την Τ.Μ. Y , να υπολογίσετε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.), $F_Y(y)$, και την σ.π.π., $f_Y(y)$.

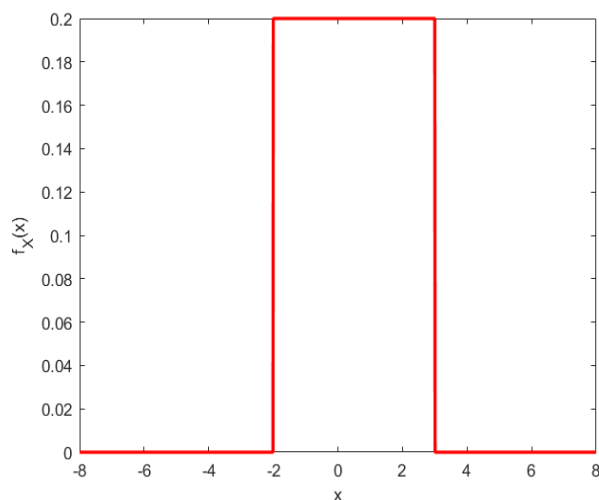
Λύση:

$$(i) \text{ Καθώς } X \sim U[a, b], \quad E[X] = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{25}{12}$$

Λύνοντας, έχουμε ότι $a = -2$ και $b = 3$. Άρα:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & -2 \leq x < 3 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

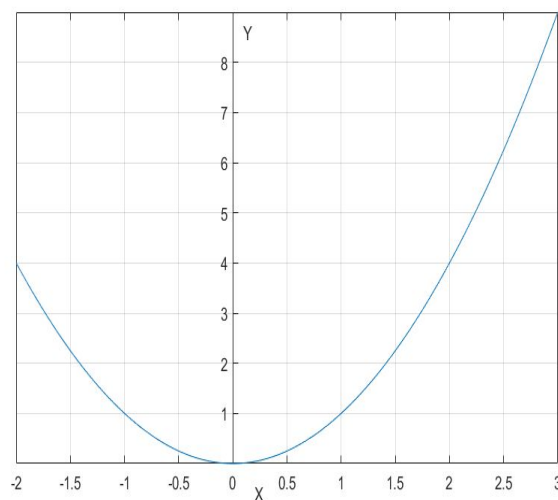
Η γραφική παράσταση της $f_X(x)$ φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Γραφική παράσταση σ.π.π. $f_X(x)$.

(ii) Η Y παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, 9]$.

Σχήμα 4: Γραφική παράσταση μετασχηματισμού.



(iii) Για $y < 0$, $F_Y(y) = 0$.

$$\text{Για } y \geq 0, \quad F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$$

Παίρνουμε περιπτώσεις για $y \geq 0$:

- $0 \leq \sqrt{y} \leq 2 \Rightarrow -2 \leq -\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y} \leq 2 \Rightarrow$

$$F_Y(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x) \, dx = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} 0.2 \, dx = 0.4\sqrt{y}$$

- $2 < \sqrt{y} \leq 3 \Rightarrow -\sqrt{y} < -2 \leq X \leq \sqrt{y} \leq 3 \Rightarrow$

$$F_Y(y) = \int_{-2}^{\sqrt{y}} f_X(x) \, dx = \int_{-2}^{\sqrt{y}} 0.2 \, dx = 0.2\sqrt{y} + 0.4$$

- $y > 3 \Rightarrow F_Y(y) = 1$

Τελικά:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 0.4\sqrt{y} & 0 < y \leq 4 \\ 0.2\sqrt{y} + 0.4 & 4 < y \leq 9 \\ 1 & y > 9 \end{cases}$$

και

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{0.2}{\sqrt{y}} & 0 < y \leq 4 \\ \frac{0.1}{\sqrt{y}} & 4 < y \leq 9 \end{cases}$$

Άσκηση 4.

Θεωρούμε την Τ.Μ. X η οποία είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη μεταξύ των τιμών 1 και 2, δηλαδή: $X \sim U[1,2]$. Ορίζουμε μια νέα τυχαία μεταβλητή ως εξής: $Y = e^{-2X}$.

- (i) Να γίνει η γραφική παράσταση της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας της Τ.Μ X , $f_X(x)$, καθώς και αυτή του μετασχηματισμού $Y = e^{-2X}$.
- (ii) Να υπολογιστεί η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής της Τ.Μ. Y , $F_Y(y)$, και να γίνει η γραφική της παράσταση.
- (iii) Να υπολογιστεί η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας της Τ.Μ. Y , $f_Y(y)$, και να γίνει η γραφική της παράσταση.
- (iv) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(Y \leq e^{-3})$.

Λύση:

- (i) Από την θεωρία γνωρίζουμε ως όταν η συνεχής Τ.Μ. X ακολουθεί Ομοιόμορφη Κατανομή στο διάστημα $[a, b]$, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) αυτής θα δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

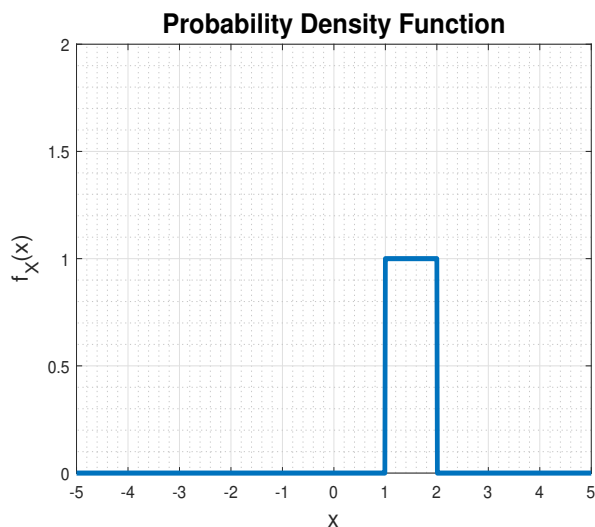
Με βάση την εκφώνηση της Άσκησης, προκύπτει ότι:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Άρα, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (ΣΠΠ) (PDF) θα είναι τελικά:

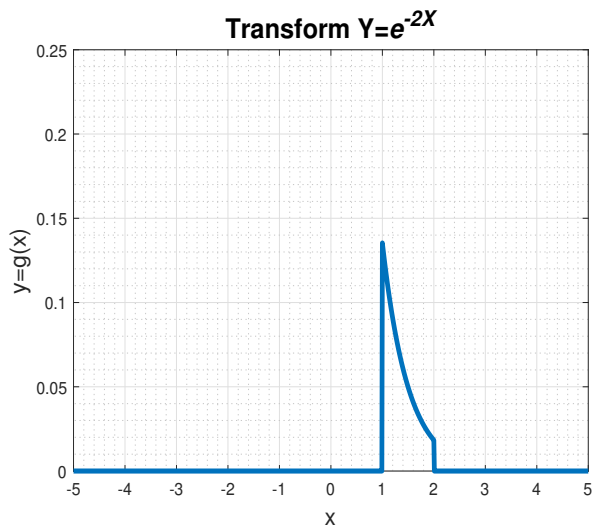
$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας της X , $f_X(x)$, φαίνεται στο Σχήμα 5 (περιορισμένη στο διάστημα $[-5, 5]$).



Σχήμα 5: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$.

Η γραφική παράσταση του μετασχηματισμού $Y = g(X)$ φαίνεται στο Σχήμα 6 (περιορισμένη στο διάστημα $[-5, 5]$).



Σχήμα 6: Μετασχηματισμός $Y = g(X)$.

- (ii) Από το Σχήμα 6 βλέπουμε ότι η Τ.Μ Y παίρνει τιμές στο διάστημα $[e^{-4}, e^{-2}] = [0.019448, 0.13534]$. Άρα, θεωρούμε τις εξής περιπτώσεις:

(a) Για $y < e^{-4}$, έχουμε:

$$F_Y(y) = 0$$

(b) Για $e^{-4} \leq y < e^{-2}$, έχουμε:

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(e^{-2X} < y) = P(-2X < \ln y) = P(X > -\frac{1}{2} \ln y) = \int_{-\frac{1}{2} \ln y}^{+\infty} 1 dx = \int_{-\frac{1}{2} \ln y}^2 1 dx = [x]_{-\frac{1}{2} \ln y}^2 = 2 + \frac{1}{2} \ln y$$

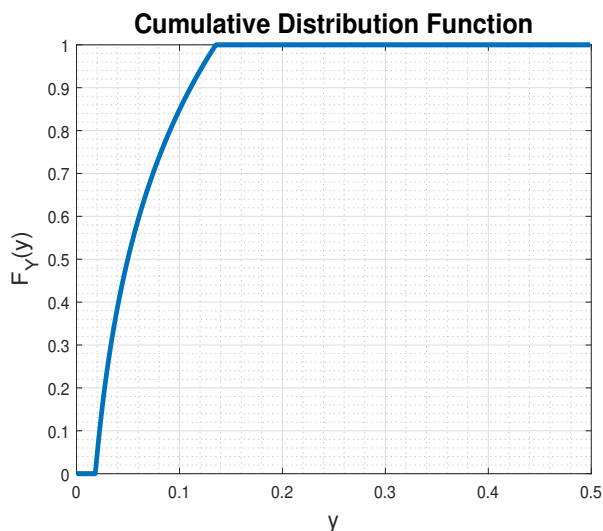
(c) Για $y > e^{-2}$, έχουμε:

$$F_Y(y) = 1$$

Άρα, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής της Τ.Μ. Y , $F_Y(y)$, θα είναι τελικά:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < e^{-4} \\ 2 + \frac{1}{2} \ln y & e^{-4} \leq y < e^{-2} \\ 1 & y > e^{-2} \end{cases}$$

Σχεδιάζοντας κάθε κλάδο της $F_Y(y)$ στα αντίστοιχα διαστήματα, λαμβάνουμε την γραφική παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα $[0, 0.5]$) που φαίνεται στο Σχήμα 7.



Σχήμα 7: Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής $F_Y(y)$.

(iii) Με γνωστή την Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$$

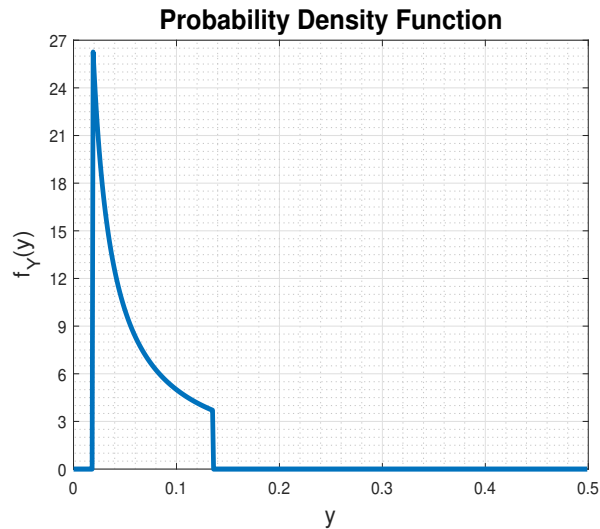
Με βάση την δοσμένη Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής, έχουμε:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2y} & e^{-4} \leq y < e^{-2} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Σχεδιάζοντας κάθε κλάδο της $f_Y(y)$ στα αντίστοιχα διαστήματα, λαμβάνουμε την γραφική παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα $[0, 0.5]$) που φαίνεται στο Σχήμα 8.

(iv) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, έχουμε:

$$P(Y \leq e^{-3}) = F_Y(e^{-3}) = 2 + \frac{1}{2} \ln(e^{-3}) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Σχήμα 8: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_Y(y)$.**Άσκηση 5.**

Έστω X και Y τ.μ με $E[X] = 1$, $E[Y] = 4$, $var(X) = 4$, $var(Y) = 9$ και συντελεστή συσχέτισης $\rho_{(X,Y)} = 0.1$

- (i) Αν $Z = 2(X + Y)(X - Y)$, βρείτε την $E[Z]$
- (ii) Αν $T = 2X + Y$ και $U = 2X - Y$, βρείτε την συνδιασπορά των τ.μ T και U , $cov(T, U)$
- (iii) Αν $W = 3X + Y + 2$, βρείτε τις $E[W]$ και $var(W)$

Λύση:

- (i) Αφού $Z = 2(X + Y)(X - Y) = 2(X^2 - Y^2)$, Θα έχουμε:

$$E[Z] = 2(E[X^2] - E[Y^2]) = 2(var(X) + E^2[X] - var(Y) - E^2[Y]) = 2(4 + 1^2 - 9 - 4^2) = -40$$

- (ii) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} cov(T, U) &= cov(2X + Y, 2X - Y) = E[(2X + Y)(2X - Y)] - E[2X + Y]E[2X - Y] \\ &= E[4X^2 - Y^2] - (2E[X] + E[Y])(2E[X] - E[Y]) \\ &= 4E[X^2] - E[Y^2] - 4E^2[X] + 2E[X]E[Y] - 2E[X]E[Y] + E^2[Y] \\ &= 4E[X^2] - 4E^2[X] - E[Y^2] + E^2[Y] \\ &= 4E[X^2] - 4E^2[X] - (E[Y^2] - E^2[Y]) \\ &= 4var(X) - var(Y) \\ &= 4 \cdot 4 - 9 = 7 \end{aligned}$$

- (iii) Είναι:

$$E[W] = E[3X + Y + 2] = 3E[X] + E[Y] + 2 = 3 \cdot 1 + 4 + 2 = 9$$

$$\begin{aligned} var(W) &= var(3X + Y + 2) = 3^2 var(X) + 1^2 var(Y) + 2 \cdot 3 \cdot cov(X, Y) \\ &= 9var(X) + var(Y) + 6cov(X, Y) = 9 \cdot 4 + 1 \cdot 4 + 6 = 9 \cdot 4 + 1 + 6 \cdot 0.6 \\ &= 36 + 9 + 3.6 = 48.6 \end{aligned}$$

$$\text{όπου } cov(X, Y) = \rho \sqrt{var(X) \cdot var(Y)} = 0.1 \sqrt{4 \cdot 9} = 0.6$$

Άσκηση 6. Θεωρήστε 4 Τ.Μ. W, X, Y, Z , για τις οποίες ισχύουν:

$$E[W] = E[X] = E[Y] = E[Z] = 0$$

$$\text{var}(W) = \text{var}(X) = \text{var}(Y) = \text{var}(Z) = 1.$$

Επιπλέον, υποθέστε ότι οι W, X, Y, Z είναι ασυσχέτιστες ανά ζεύγη. Να υπολογιστούν οι συντελεστές συσχέτισης $\rho(A, B)$ και $\rho(A, C)$, όπου:

$$A = W + X, B = X + Y, C = Y + Z.$$

Λύση: Εφόσον οι W, X, Y, Z είναι ασυσχέτιστες ανά ζεύγη, έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{cov}(W, X) &= 0 \Rightarrow E[WX] - E[W]E[X] = 0 \Rightarrow E[WX] = E[W]E[X]. \\ \text{cov}(W, Y) &= 0 \Rightarrow E[WY] - E[W]E[Y] = 0 \Rightarrow E[WY] = E[W]E[Y]. \\ \text{cov}(W, Z) &= 0 \Rightarrow E[WZ] - E[W]E[Z] = 0 \Rightarrow E[WZ] = E[W]E[Z]. \\ \text{cov}(X, Y) &= 0 \Rightarrow E[XY] - E[X]E[Y] = 0 \Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y]. \\ \text{cov}(X, Z) &= 0 \Rightarrow E[XZ] - E[X]E[Z] = 0 \Rightarrow E[XZ] = E[X]E[Z]. \\ \text{cov}(Y, Z) &= 0 \Rightarrow E[YZ] - E[Y]E[Z] = 0 \Rightarrow E[YZ] = E[Y]E[Z]. \end{aligned}$$

Με βάση τον ορισμό του συντελεστή συσχέτισης των A και B , έχουμε:

$$\rho(A, B) = \frac{\text{cov}(A, B)}{\sqrt{\text{var}(A)\text{var}(B)}}.$$

Για τον υπολογισμό της συνδιασποράς των A και B , έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{cov}(A, B) &= E[AB] - E[A]E[B] = E[(W + X)(X + Y)] - E[W + X]E[X + Y] \\ &= E[WX + WY + X^2 + XY] - (E[W] + E[X])(E[X] + E[Y]) = \\ &= E[WX] + E[WY] + E[X^2] + E[XY] - (0 + 0)(0 + 0) \\ &= E[W]E[X] + E[W]E[Y] + E[X^2] + E[X]E[Y] \\ &= 0 \times 0 + 0 \times 0 + E[X^2] + 0 \times 0 \\ &= E[X^2] = \text{var}(X) + (E[X])^2 = 1 + 0^2 = 1. \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό της διασποράς των A και B , έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{var}(A) &= \text{var}(W + X) = \text{var}(W) - 2\text{cov}(W, X) + \text{var}(X) = 1 - 2 \times 0 + 1 = 2. \\ \text{var}(B) &= \text{var}(X + Y) = \text{var}(X) - 2\text{cov}(X, Y) + \text{var}(Y) = 1 - 2 \times 0 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, ο συντελεστής συσχέτισης των A και B θα είναι τελικά:

$$\rho(A, B) = \frac{\text{cov}(A, B)}{\sqrt{\text{var}(A)\text{var}(B)}} = \frac{1}{\sqrt{2 \times 2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}.$$

Ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό, με βάση τον ορισμό του συντελεστή συσχέτισης των A και C , έχουμε:

$$\rho(A, C) = \frac{\text{cov}(A, C)}{\sqrt{\text{var}(A)\text{var}(C)}}.$$

Για τον υπολογισμό της συνδιασποράς των A και C , έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{cov}(A, C) &= E[AC] - E[A]E[C] = E[(W + X)(Y + Z)] - E[W + X]E[Y + Z] \\ &= E[WY + WZ + XY + XZ] - (E[W] + E[X])(E[Y] + E[Z]) = \\ &= E[WY] + E[WZ] + E[XY] + E[XZ] - (0 + 0)(0 + 0) \\ &= E[W]E[Y] + E[W]E[Z] + E[X]E[Y] + E[X]E[Z] \\ &= 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 0. \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό της διασποράς των A και C , έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{var}(A) &= \text{var}(W + X) = \text{var}(W) - 2\text{cov}(W, X) + \text{var}(X) = 1 - 2 \times 0 + 1 = 2. \\ \text{var}(C) &= \text{var}(Y + Z) = \text{var}(Y) - 2\text{cov}(Y, Z) + \text{var}(Z) = 1 - 2 \times 0 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, ο συντελεστής συσχέτισης των A και C θα είναι τελικά:

$$\rho(A, C) = \frac{\text{cov}(A, C)}{\sqrt{\text{var}(A)\text{var}(C)}} = \frac{0}{\sqrt{2 \times 2}} = \frac{0}{\sqrt{4}} = \frac{0}{2} = 0.$$