

Άσκηση 1 Η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την ακόλουθη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (Σ.Π.Π.):

$$f_X(x) = \begin{cases} c \cdot (1 - x^2), & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}.$$

- (α) Υπολογίστε την τιμή του c και σχεδιάστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$.
(β) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X .
(γ) Υπολογίστε και σχεδιάστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (Α.Σ.Κ.) $F_X(x)$.
(δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X = 0)$.
(ε) Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(0 < X < 1)$, $P(X > 0)$, $P(-0.5 < X < 0.5)$.

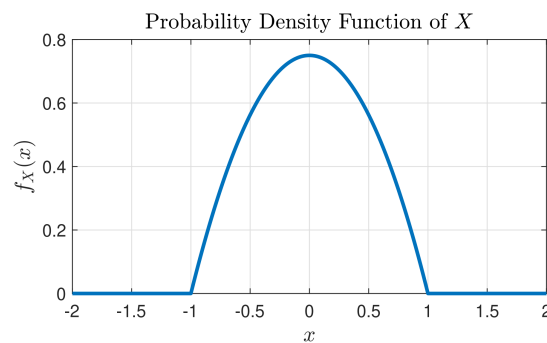
Λύση:

- (α) Για να είναι η $f_X(x)$ συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, πρέπει να ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1.$$

Άρα,

$$c \cdot \int_{-1}^{+1} (1 - x^2) dx = 1 \Rightarrow c \cdot \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{+1} = 1 \Rightarrow c \cdot \left[1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \right] = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{4}.$$



Σχήμα 1: Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$.

(β)

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-1}^{+1} x \frac{3}{4} (1 - x^2) dx = \frac{3}{4} \int_{-1}^{+1} (x - x^3) dx = \frac{3}{4} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^{+1} \\ &= \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \\ &\Rightarrow E[X] = 0. \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε αρχικά τη 2η ροπή της X :

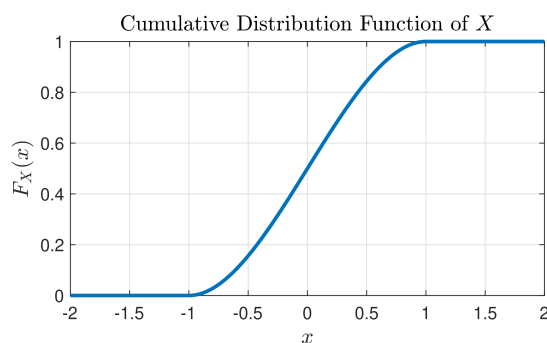
$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{-1}^{+1} x^2 \frac{3}{4} (1-x^2) dx = \frac{3}{4} \int_{-1}^{+1} (x^2 - x^4) dx = \frac{3}{4} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{4} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{15} \\ \Rightarrow E[X^2] &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 \Rightarrow \text{var}(X) = \frac{1}{5}.$$

(γ)

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \frac{3}{4} \cdot \int_{-1}^x (1-t^2) dt = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{3}{4} \cdot \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} \right), & -1 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}.$$



Σχήμα 2: Η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας $F_X(x)$.

(δ) Η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή, άρα $P(X = 0) = 0$.

(ε) Η ζητούμενες πιθανότητες είναι ίσες με:

$$\begin{aligned} P(0 < X < 1) &= F_X(1) - F_X(0) = 1 - \frac{3}{4} \left(0 - 0 + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{2}. \\ P(X > 0) &= 1 - P(X \leq 0) = 1 - F_X(0) = \frac{1}{2}. \\ P(-0.5 < X < 0.5) &= F_X(0.5) - F_X(-0.5) = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{2}{3} \right) - \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{2}{3} \right) = \frac{11}{16}. \end{aligned}$$

Άσκηση 2 Έστω ότι ο χρόνος λειτουργίας ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή (σε ώρες) πριν συμβεί κάποια βλάβη ακολουθεί την παρακάτω κατανομή:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{100} \cdot e^{-\frac{1}{100}x}, & x > 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

- (α) Εξετάστε αν η παραπάνω συνάρτηση ικανοποιεί τις συνθήκες μίας συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας.
- (β) Ποιά η πιθανότητα να λειτουργήσει ένας υπολογιστής για λιγότερο από 100 ώρες πριν πάθει κάποια βλάβη;
- (γ) Ποια η πιθανότητα μεταξύ 4 υπολογιστών μόνο ένας να λειτουργήσει για λιγότερο από 100 ώρες πριν πάθει κάποια βλάβη;

Λύση:

- (α) i) $f_X(x) \geq 0, \forall x$.
ii)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx &= \frac{1}{100} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{100}x} dx = \frac{1}{100} \left[-100e^{-\frac{1}{100}x} \right]_0^{+\infty} = - \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{100}x} - e^0 \right) \\ &\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1. \end{aligned}$$

Ικανοποιούνται και οι δύο συνθήκες, οπότε η $f_X(x)$ είναι έγκυρη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

- (β) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$P(X < 100) = \frac{1}{100} \int_0^{100} e^{-\frac{1}{100}x} dx = - \left[e^{-\frac{1}{100}x} \right]_0^{100} = - (e^{-1} - e^0) = 1 - e^{-1} \approx 0.633.$$

- (γ) Έστω Y ο αριθμός των υπολογιστών που λειτουργούν για λιγότερο από 100 ώρες πριν πάθουν κάποια βλάβη. Η τυχαία μεταβλητή ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή, $Y \sim \Delta(4, 0.633)$. Άρα,

$$P(Y = 1) = \binom{4}{1} (0.633)^1 (1 - 0.633)^{4-1} \approx 0.125.$$

Άσκηση 3 Δίνεται η τ.μ. $X \sim U[-5, 5]$, δηλαδή η X είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[-5, 5]$. Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος $X^2 + X - 6 > 0$.

Λύση: Εφόσον $X \sim U[-5, 5]$, θα είναι:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & \text{αν } -5 \leq x \leq 5 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $X^2 + X - 6 = (X + 3)(X - 2)$. Οπότε, $X^2 + X - 6 > 0$ αν και μόνο αν $\{X < -3\} \cup \{X > 2\}$. Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X^2 + X - 6 > 0) &= P(\{X < -3\} \cup \{X > 2\}) \cap \{-5 \leq X \leq 5\}) \\ &= P(\{-5 \leq X < -3\} \cup \{2 < X \leq 5\}) \\ &= P(\{-5 \leq X < -3\}) + P(\{2 < X \leq 5\}) \\ &= \frac{1}{10}(-3 - (-5)) + \frac{1}{10}(5 - 2) \\ &= \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0.5 \end{aligned}$$

Άσκηση 4 Έστω ότι παίζετε βελάκια, σε ένα στόχο με ακτίνα r . Θεωρείστε ότι τα βελάκια πετυχαίνουν πάντα τον στόχο και ότι είναι ισοπίθανο να χτυπήσουν οποιοδήποτε σημείο στο στόχο. Έστω X η απόσταση που έχει ένα βελάκι από το κέντρο του στόχου.

- (α) Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(x)$, και την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_X(x)$, της X .
- (β) Βρείτε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X .
- (γ) Έστω ότι ο στόχος έχει έναν εσωτερικό κύκλο ακτίνας t . Οι βαθμοί που παίρνετε έχουν ως εξής:

$$S = \begin{cases} \frac{1}{X}, & X \leq t \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της S . Είναι η S μια συνεχής τυχαία μεταβλητή;

Λύση:

- (α) Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{E(x)}{E(r)} = \frac{\pi x^2}{\pi r^2} = \frac{x^2}{r^2}, \text{ για } 0 \leq x \leq r.$$

Άρα,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{r^2}, & 0 \leq x \leq r \\ 1, & x > r \end{cases}.$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{2x}{r^2}, & 0 \leq x \leq r \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

- (β) Η μέση τιμή είναι:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \frac{2}{r^2} \int_0^r x^2 dx = \frac{2}{r^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^r \\ &\Rightarrow E[X] = \frac{2}{3}r. \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε αρχικά τη 2η ροπή της X :

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \frac{2}{r^2} \int_0^r x^3 dx = \frac{2}{r^2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^r = \frac{r^2}{2}.$$

Άρα,

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{r^2}{2} - \frac{4r^2}{9} \Rightarrow \text{var}(X) = \frac{r^2}{18}.$$

- (γ) Έχουμε ότι

$$S = \begin{cases} \frac{1}{X}, & X \leq t \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases},$$

άρα η S παίρνει τιμές στο σύνολο $D_S = \{0\} \cup [\frac{1}{t}, +\infty)$, οπότε δεν είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή.

Γνωρίζουμε ότι $F_S(s) = P(S \leq s)$. Έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- αν $s < \frac{1}{t}$ τότε,

$$F_S(s) = P(S=0) = P(X > t) = \int_t^{+\infty} f_X(x) dx = \int_t^r \frac{2x}{r^2} dx = \frac{2}{r^2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_t^r = \frac{r^2 - t^2}{r^2},$$

- αν $s \geq \frac{1}{t}$ τότε,

$$\begin{aligned} F_S(s) &= P\left(S < \frac{1}{t}\right) + P\left(\frac{1}{t} \leq S \leq s\right) = \frac{r^2 - t^2}{r^2} + P\left(\frac{1}{s} \leq \frac{1}{S} \leq t\right) = \frac{r^2 - t^2}{r^2} + P\left(\frac{1}{s} \leq X \leq t\right) \\ &= \frac{r^2 - t^2}{r^2} + \int_{1/s}^t \frac{2x}{r^2} dx = \frac{r^2 - t^2}{r^2} + \frac{1}{r^2} \left(t^2 - \frac{1}{s^2}\right) \Rightarrow F_S(s) = 1 - \frac{1}{r^2 s^2}. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$F_S(s) = \begin{cases} 0, & s < 0 \\ \frac{r^2 - t^2}{r^2}, & 0 \leq s \leq \frac{1}{t} \\ 1 - \frac{1}{r^2 s^2}, & s \geq \frac{1}{t} \end{cases}.$$

Άσκηση 5 Η ποσότητα X του καφέ που βρίσκεται σε πακέτα των 500 γρ. είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 500 και διασπορά 25, $X \sim N(500, 25)$. Αγοράζουμε τρία πακέτα των 500 γρ. . Ποια είναι η πιθανότητα:

- ένα μόνο πακέτο από τα τρία να περιέχει τουλάχιστον 490 γρ. καφέ;
- το καθένα από τα τρία να έχει βάρος μεταξύ 490 και 505 γρ.;

Εκφράστε την απάντησή σας βάσει των τιμών $\Phi(2) = 0.9772$ και $\Phi(1) = 0.8413$ της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής.

Λύση: Ισχύει ότι $X \sim N(500, 25)$, άρα $Z = \frac{X-500}{5} \sim N(0, 1)$.

- Έχουμε

$$P(X \geq 490) = P\left(\frac{X - 500}{5} \geq \frac{490 - 500}{5}\right) = P(Z \geq -2) = 1 - P(Z \leq -2) = 1 - \Phi(-2) = 0.9772$$

Επομένως

$$P(1 \text{ από τα } 3 \text{ πακέτα έχει βάρος } \geq 490) = \binom{3}{1} (0.9772)^1 (1 - 0.9772)^2 = 0.001524$$

- Έχουμε

$$\begin{aligned} P(490 \leq X \leq 505) &= P\left(\frac{490 - 500}{5} \leq \frac{X - 500}{5} \leq \frac{505 - 500}{5}\right) = P(-2 \leq Z \leq 1) = \\ &= \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) + \Phi(2) - 1 = 0.8413 + 0.9772 - 1 = 0.8185 \end{aligned}$$

Επομένως

$$P(\text{και τα } 3 \text{ πακέτα είναι μεταξύ } 490 \text{ και } 505 \text{ γρ.}) = (0.8185)^3 = 0.54837$$

Άσκηση 6

- (α) Η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά 1. Βρείτε τις πιθανότητες $P(X \leq 1.5)$ και $P(X \leq -1)$.
- (β) Η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή -1 και διασπορά 1. Η τυχαία μεταβλητή Z δίνεται από τη σχέση $Z = 2Y + 3$. Βρείτε την πιθανότητα $P(-1 \leq Z \leq 3)$.
- (γ) Η τυχαία μεταβλητή W ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 3 και τυπική απόκλιση 3. Βρείτε τις πιθανότητες $P(3 < W < 6)$ και $P(|W - 3| > 6)$.

Σας δίνονται οι τιμές $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(1.5) = 0.9332$ και $\Phi(2) = 0.9772$.

Λύση:

- (α) $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, άρα

$$P(X \leq 1.5) = \Phi(1.5) = 0.9332.$$

$$P(X \leq -1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587.$$

- (β) $Y \sim \mathcal{N}(-1, 1)$, και

$$Z = 2Y + 3 \Rightarrow E[Z] = 2E[Y] + 3 = 2 \cdot (-1) + 3 = 1$$

$$\text{var}(Z) = 2^2 \text{var}(Y) = 4 \cdot 1 = 4.$$

Οπότε, $Z \sim \mathcal{N}(1, 4)$. Ορίζουμε την $X = \frac{Z-1}{2} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Άρα, έχουμε

$$\begin{aligned} P(-1 \leq Z \leq 3) &= P\left(\frac{-1-1}{2} \leq \frac{Z-1}{2} \leq \frac{3-1}{2}\right) = P(-1 \leq X \leq 1) = P(X \leq 1) - P(X \leq -1) \\ &= \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 \approx 0.6826. \end{aligned}$$

- (γ) $W \sim \mathcal{N}(3, 9)$ και ορίζουμε την $X = \frac{W-3}{3} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Οπότε, έχουμε

$$\begin{aligned} P(3 < W < 6) &= P\left(\frac{3-3}{3} < \frac{W-3}{3} < \frac{6-3}{3}\right) = P(0 < X < 1) = P(X < 1) - P(X \leq 0) \\ &= \Phi(1) - \Phi(0) = 0.8413 - 0.5 = 0.3413 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} P(|W - 3| > 6) &= P\left(\left|\frac{W-3}{3}\right| > \frac{6}{3}\right) = P(|X| > 2) = 1 - P(|X| \leq 2) = 1 - P(-2 \leq X \leq 2) \\ &= 1 - P(X \leq 2) + P(X \leq -2) = 1 - \Phi(2) + 1 - \Phi(2) = 2 - 2\Phi(2) = 0.0456. \end{aligned}$$