

Άσκηση 1

Έστω μία διακριτή τυχαία μεταβλητή X , με συνάρτηση μάζας πιθανότητας (PMF) την ακόλουθη:

$$P_X(x) = \begin{cases} 0.1 & \text{για } x = 0.2 \\ 0.2 & \text{για } x = 0.4 \\ 0.2 & \text{για } x = 0.5 \\ 0.3 & \text{για } x = 0.8 \\ 0.2 & \text{για } x = 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

- (α) Βρείτε τον δειγματικό χώρο της τ.μ. X .
- (β) Βρείτε την πιθανότητα $P(X \leq 0.5)$.
- (γ) Βρείτε την πιθανότητα $P(0.25 < X < 0.75)$.
- (δ) Βρείτε την πιθανότητα $P(X = 0.2 | X < 0.6)$.

Λύση

(α) Ο δειγματικός χώρος είναι οι πιθανές τιμές που μπορεί να πάρει το X . Από την PMF βλέπουμε ότι είναι: $\{0.2, 0.4, 0.5, 0.8, 1\}$

(β)

$$\begin{aligned} P(X \leq 0.5) &= P(X = 0.2) + P(X = 0.4) + P(X = 0.5) = P_X(0.2) + P_X(0.4) + P_X(0.5) \\ &= 0.1 + 0.2 + 0.2 = 0.5 \end{aligned}$$

(γ)

$$P(0.25 < X < 0.75) = P(X = 0.4) + P(X = 0.5) = P_X(0.4) + P_X(0.5) = 0.2 + 0.2 = 0.4$$

(δ) Γνωρίζουμε ότι:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} P(X = 0.2 | X < 0.6) &= \frac{P(X = 0.2 \cap X < 0.6)}{P(X < 0.6)} = \frac{P(X = 0.2)}{P(X < 0.6)} = \\ &= \frac{P_X(0.2)}{P_X(0.2) + P_X(0.4) + P_X(0.5)} = \frac{0.1}{0.1 + 0.2 + 0.2} = 0.2 \end{aligned}$$

Άσκηση 2

Έστω μία τυχαία μεταβλητή X , με συνάρτηση μάζας πιθανότητας (PMF) $p_k = \frac{\alpha}{2^k}$ για $k = 1, 2, \dots$.

(α) Να βρείτε την τιμή του α .

(β) Βρείτε την πιθανότητα $P(X > 4)$ και την πιθανότητα $P(6 \leq X \leq 8)$.

(γ) Υπολογίστε την μέση τιμή $E[X]$ της τ.μ. X .

Λύση

(α) Θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη κανονικοποίησης:

$$\sum_x P_X(x) = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha}{2^k} \Rightarrow \alpha * \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right) \Rightarrow \frac{\alpha}{2} * \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right)$$

Από το άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου, γνωρίζουμε ότι:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \text{ για } -1 < x < 1$$

Επομένως:

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

Άρα $\alpha = 1$

(β)

$$\begin{aligned} P(X > 4) &= 1 - P(X \leq 4) = 1 - (P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)) = \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

$$P(6 \leq X \leq 8) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) = \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} = \frac{7}{256}$$

(γ)

$$E[X] = \sum_k k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1 - \frac{1}{2})^2}\right) = 2$$

Άσκηση 3

Μια ασφαλιστική εταιρία γνωρίζει ότι ο Νίκος με πιθανότητα 8% θα εμπλακεί σε αυτοκινητιστικό ατύχημα τον επόμενο χρόνο. Αν ο Νίκος εμπλακεί σε οποιουδήποτε είδους ατύχημα η εταιρία του εγγυάται ότι θα τον πληρώσει 10.000€. Η εταιρία αποφασίζει να χρεώσει τον Νίκο 400€ για έναν χρόνο ασφάλισης.

(α) Έστω X το κέρδος ή η ζημία της ασφαλιστικής για το επόμενο έτος, βάση της παραπάνω πολιτικής. Βρείτε το $E[X]$, την προβλεπόμενη επιστροφή για την ασφαλιστική εταιρία. Χρειάζεται η εταιρία να αυξήσει το κόστος της ασφάλισης για να έχει κέρδος ή όχι;

(β) Ποιο πρέπει να είναι το ασφάλιστρο (κόστος της ασφάλισης του Νίκου) για να έχει η εταιρία προβλεπόμενο κέρδος 200€;

Λύση

(α) Αν ο Νίκος δεν εμπλακεί σε αυτοκινητιστικό ατύχημα, η εταιρία έχει κέρδος 400€. Αν εμπλακεί, έχει ζημία 9.600€.

$$E[X] = (400 - 10.000) * 0.08 + 400 * (1 - 0.08) = -400$$

Η προβλεπόμενη ζημία της εταιρίας είναι 400€, άρα πρέπει να χρεώσει τον Νίκο περισσότερο.

(β) Έστω P το κόστος της ασφάλισης του Νίκου. Για να έχει η εταιρία προβλεπόμενο κέρδος 200€ πρέπει να ισχύει:

$$E[X] = 200 \Rightarrow (P - 10.000) * 0.08 + P * 0.92 = 200 \Rightarrow P = 1000$$

Άσκηση 4

Μία εξέταση που αποτελείται από 10 ερωτήσεις Σ/Λ, ολοκληρώνεται μέσα σε 2 λεπτά, από την Μαρία την οποία την πήρε ο ύπνος κατά την διάρκεια της εξέτασης και ξύπνησε 2 λεπτά πριν την λήξη της. Η Μαρία, λόγω του λιγοστού χρόνου που της έχει μείνει, απαντάει τυχαία και τις 10 ερωτήσεις.

(α) Βρείτε την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των ερωτήσεων που απάντησε σωστά η Μαρία.

(β) Δεδομένου ότι για να περάσει η Μαρία το μάθημα, πρέπει να απαντήσει σωστά τουλάχιστον 7 ερωτήσεις, ποιά η πιθανότητα η Μαρία να μην έχει κοπεί;

Λύση

(α) Έστω X , η διακριτή τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το πλήθος των σωστών απαντήσεων που έδωσε η Μαρία. Η X ακολουθεί Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n=10$ και $p=0.5$ (εφόσον απαντάει τυχαία). Επομένως έχουμε:

$$E[X] = np = 10 * 0.5 = 5$$

$$var(X) = np(1 - p) = 10 * 0.5^2 = 2.5$$

$$\sigma = \sqrt{var(X)} = \sqrt{2.5} = 1.58$$

(β) Η πιθανότητα να περάσει η Μαρία το μάθημα είναι:

$$P(X \geq 7) = 1 - P(X < 7) = 1 - (P_X(0) + P_X(1) + \dots + P_X(6)) = 0.172$$

=

$$P_X(0) = \binom{10}{0} 0.5^0 (1 - 0.5)^{10-0} = 0.001$$

$$P_X(1) = \binom{10}{1} 0.5^1 (1 - 0.5)^{10-1} = 0.01$$

$$P_X(2) = \binom{10}{2} 0.5^2 (1 - 0.5)^{10-2} = 0.044$$

...

Άσκηση 5

Σε ένα μικρό αεροδρόμιο για ιδιωτικά αεροπλάνα, ο μέσος ρυθμός άφιξης κάποιου αεροπλάνου είναι 1 αεροπλάνο κάθε 10 λεπτά.

(α) Βρείτε την πιθανότητα να υπάρχουν ακριβώς 4 αφίξεις την επόμενη ώρα.

(β) Βρείτε την πιθανότητα να υπάρχουν λιγότερες από 2 πτήσεις την επόμενη ώρα.

Λύση

(α) Έστω X , η διακριτή τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το πλήθος των αεροπλάνων που προσγειώνονται στο αεροδρόμιο σε μία ώρα. Η X ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 6$, όσο και το μέσο πλήθος αεροπλάνων που προσγειώνονται σε 1 ώρα.

$$P(X = 4) = p_x(4) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^4}{4!} = 0.1339$$

(β) Η πιθανότητα να υπάρχουν λιγότερες από 2 πτήσεις την επόμενη ώρα είναι:

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = e^{-6} \frac{6^0}{0!} + e^{-6} \frac{6^1}{1!} = 7e^{-6} = 0.017$$

Άσκηση 6

Έστω X και Y ανεξάρτητες τ.μ. οι οποίες παίρνουν τιμές στο σύνολο 1,2,3. Ορίζουμε τις τ.μ. $V = 2X + 2Y$ και $W = X - Y$.

(α) Υποθέτουμε ότι οι πιθανότητες $P(X = k)$ και $P(Y = k)$ είναι θετικές για κάθε k στο σύνολο 1, 2, 3. Είναι οι W και V ανεξάρτητες; Εξηγήστε.

Για τα υποερωτήματα (β)-(ε) υποθέτουμε ότι οι X και Y ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο 1,2,3.

(β) Υπολογίστε και δώστε τη γραφική παράσταση της από κοινού συνάρτησης πιθανότητας $p_{X,Y}(x, y)$ των τ.μ. X και Y .

(γ) Υπολογίστε την συνάρτηση πιθανότητας $p_V(v)$, την μέση τιμή $E[V]$ και την διασπορά, $\text{var}(V)$ της τ.μ. V . Σχεδιάστε την γραφική παράσταση, $p_V(v)$.

(δ) Υπολογίστε και δώστε τη γραφική παράσταση της από κοινού συνάρτησης πιθανότητας $p_{V,W}(v, w)$ των τ.μ. V και W .

Λύση

(α) Οι τυχαίες μεταβλητές X και Y δεν γίνεται να είναι ανεξάρτητες π.χ. αν $V=12$ (δηλαδή $X=Y=3$) τότε $W=0$.

(β) Μας δίνεται ότι

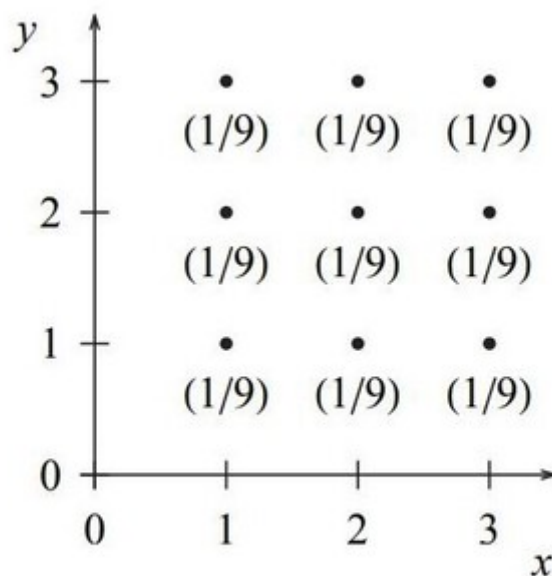
$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{για } x = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{για } y = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Επίσης X και Y είναι ανεξάρτητες. Συνεπώς $p_{X,Y}(x, y) =$

$$p_X(x)p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{9} & x, y \in 1, 2, 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της $p_{X,Y}(x, y)$ φαίνεται παρακάτω (Σχήμα 1).



Σχήμα 1: Γραφική παράσταση της $p_{X,Y}(x, y)$.

(γ) Εύκολα προκύπτει ότι η τ.μ. $V=2X+2Y$ παίρνει τιμές 4, 6, 8, 10, 12.

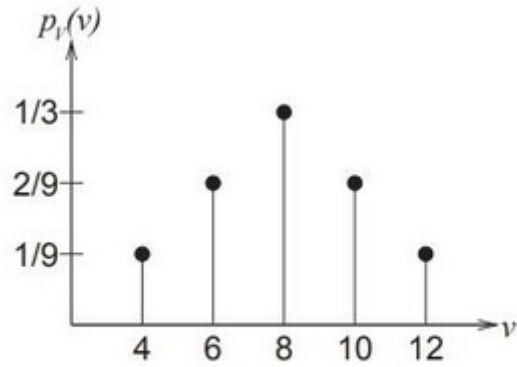
$$P(V = 4) = P((X, Y) = (1, 1)) = \frac{1}{9}$$

$$P(V = 6) = P((X, Y) = (1, 2)(2, 1)) = \frac{2}{9}$$

$$P(V = 8) = P((X, Y) = (2, 2)(3, 1)(1, 3)) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$P(V = 10) = P((X, Y) = (3, 2)(2, 3)) = \frac{2}{9}$$

$$P(V = 12) = P((X, Y) = (3, 3)) = \frac{1}{9}$$



Σχήμα 2: Γραφική παράσταση της $p_V(v)$.

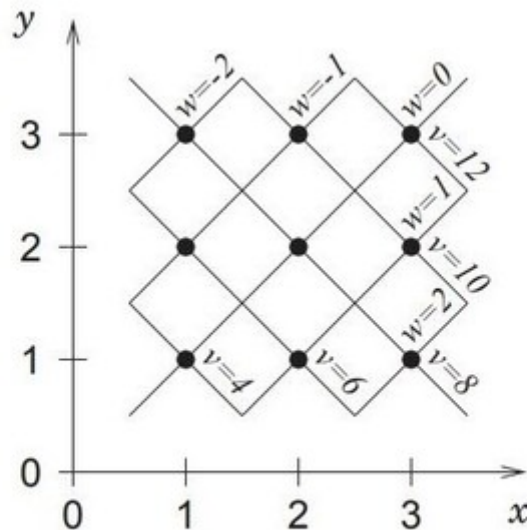
Συνεπώς η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. V είναι

$$p_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{9} & v = 4, 12 \\ \frac{2}{9} & v = 6, 10 \\ \frac{3}{9} & v = 8 \\ 0 & \text{αλλο} \end{cases}$$

Βάση της συμμετρίας στην γραφική παράσταση(βλ. Σχήμα 2), $E[V]=8$.

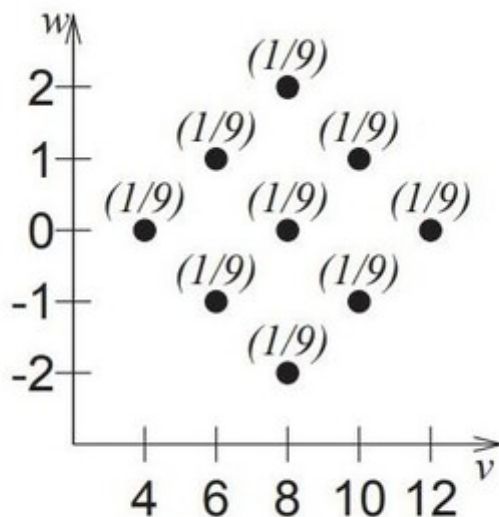
$$\text{var}(V) = \text{var}(2(X + Y)) = 4\text{var}(X + Y) = 4(\text{var}(X) + \text{var}(Y)) = 4 * 2 * \frac{3^2-1}{12} = \frac{16}{3}$$

(δ) Η γραφική παράσταση στο παρακάτω σχήμα μας βοηθάει στον υπολογισμό της $p_{V,W}(v, w)$.



Σχήμα 3: Γραφική παράσταση της $p_{X,Y}(x, y)$ με σημειωμένες τις τιμές των (v, w) .

Αυτό γίνεται υπολογίζοντας σε ποιο ζευγάρι τιμών (v, w) αντιστοιχεί κάθε δυνατό ζευγάρι τιμών (x, y) . Π.χ. στο ζευγάρι $(x, y) = (1, 1)$ αντιστοιχεί μόνο το ζευγάρι $(v, w) = (4, 0)$. Είναι μία ένα προς ένα αντιστοίχιση και εύκολα προκύπτει η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $p_{V,W}(v, w)$ της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 4: Γραφική παράσταση της $p_{V,W}(v, w)$.

Άσκηση 6

Αν X μία γεωμετρική τ.μ. δείξτε ότι:

$$P(X = n + k | X > n) = P(X = k)$$

και να εξηγήσετε τι σημαίνει η παραπάνω ισότητα.

Λύση

$$P(X = n + k | X > n) = \frac{P(X = n + k \cap X > n)}{P(X > n)} = \frac{P(X = n + k)}{P(X > n)} = \frac{p(1 - p)^{n+k-1}}{(1 - p)^n} =$$

$$p(1 - p)^{k-1} = P(X = k)$$

Η ισότητα αυτή σημαίνει ότι η πιθανότητα να έχουμε k αποτυχίες, είναι ανεξάρτητο από το αν είχαμε ήδη n αποτυχίες.