

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 3
Βασικές έννοιες Συνδυαστικής

Επιμέλεια: Αθανάσιος-Παναγιώτης Ρεντζελάς

Άσκηση 1

- α) Πόσες διαφορετικές διατάξεις (παίχτες σε διαφορετικές θέσεις) είναι δυνατές σε μια ομάδα ποδοσφαίρου που αποτελείται από 11 παίκτες;
- β) Πόσες διαφορετικές διατάξεις (διατάξεις με διαφορετικούς παίκτες) είναι δυνατές σε μια ομάδα ποδοσφαίρου που έχει 18 διαθέσιμους παίκτες και η κάθε διάταξη αποτελείται από 11 παίκτες;
- γ) Τραβάμε χαρτιά από μια τράπουλα 52 φύλλων, με επαναθέσεις. Με πόσους τρόπους είναι δυνατόν να τραβηχθούν 6 χαρτιά, έτσι ώστε στο 6ο χαρτί να εμφανίζεται η πρώτη επανάληψη;
- δ) Πόσες σημαίες με τρεις ρίγες μπορούν να σχηματιστούν εάν γνωρίζουμε ότι η μεσαία λωρίδα θα πρέπει να έχει διαφορετικό χρώμα από τις άλλες δύο και εάν τα πιθανά χρώματα είναι Κόκκινο, Μπλε, Κίτρινο, Πράσινο, Μαύρο και Άσπρο;
- ε) Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί abc , με $a, b, c \in 1, 2, 3, \dots, 9$ μπορούν να σχηματιστούν με την ιδιότητα $a \leq b \leq c$;

Λύση:

- α) Έχουμε $11! = 39916800$ διαφορετικές διατάξεις, καθώς κάθε παίκτης είναι μοναδικός και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί παραπάνω από μία φορές για μια διάταξη.
- β) Έχουμε $n = 18$ παίκτες και κάθε συνδυασμός έχει 11 παίκτες (και δεν έχουμε επανάθεση). Άρα, έχουμε $\binom{n}{k} = \frac{18!}{(18-11)!11!} = 31824$ συνδυασμούς.
- γ) Για να έχουμε την πρώτη επανάληψη στο 6ο τράβηγμα, σημαίνει ότι τα πρώτα 5 χαρτιά μπορεί να είναι οποιαδήποτε (αλλά διαφορετικά μεταξύ τους). Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{52}{5}$ διαφορετικούς τρόπους. Το 6ο φύλλο πρέπει να είναι ένα από αυτά που έχουν ήδη προηγηθεί, άρα υπάρχουν 5 τρόποι να γίνει αυτό (ή αλλιώς $\binom{5}{1}$). Επομένως, συνολικά οι πιθανοί τρόποι να γίνει αυτό είναι:

$$\binom{52}{5} \cdot \binom{5}{1} = \binom{52}{5} \cdot 5 = \frac{52!}{5! \cdot 47!} \cdot 5 = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{24}$$

- δ) Υπάρχουν 6 πιθανά χρώματα για την πρώτη λωρίδα, έπειτα 5 για την δεύτερη (αφού δεν πρέπει να είναι ίδιο χρώμα με την πρώτη), και τέλος 5 πιθανά χρώματα για την τελευταία λωρίδα (οποιοδήποτε χρώμα εκτός αυτού της μεσαίας λωρίδας). Άρα υπάρχουν $6 \cdot 5 \cdot 5 = 150$ πιθανές σημαίες.
- ε) Αν όλα τα ψηφία είναι διαφορετικά μεταξύ τους τότε η σειρά τους καθορίζεται από τη σχέση $a \leq b \leq c$. Άρα υπάρχουν $\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$ πιθανοί αριθμοί που πληρούν τη συνθήκη. Αν $a = b$ αλλά $a \neq c$, τότε έχουμε $\binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36$ πιθανούς αριθμούς που πληρούν τη συνθήκη, και ίδιο πλήθος αριθμών για $b = c$ και $a \neq b$. Τέλος, υπάρχουν 9 πιθανοί τριψήφιοι αριθμοί abc τ.ω. $a = b = c$. Οπότε έχουμε συνολικά:

$$84 + 2 \cdot 36 + 9 = 165$$

πιθανούς διαφορετικούς αριθμούς που πληρούν την δοσμένη συνθήκη.

Άσκηση 2

Πόσοι δυνατοί αναγραμματισμοί (και χωρίς νόημα) μπορούν να γίνουν από τα γράμματα των λέξεων:

(α) ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

(β) ΠΑΠΑΓΑΛΙΑ

Λύση:

Ο τύπος για τους ανασυνδυασμούς n αντικειμένων εκ των οποίων υπάρχουν k_1 αντικείμενα τύπου 1, k_2 αντικείμενα τύπου 2, ..., k_m αντικείμενα τύπου m είναι:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdots k_m!}$$

Με βάση αυτόν τον τύπο, η λύση του προβλήματος έχει ως εξής:

(α) Με τη λέξη ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ($\boxed{1: \Pi} \boxed{1: \text{I}} \boxed{1: \Theta} \boxed{1: \text{A}} \boxed{1: \text{N}} \boxed{1: \text{O}} \boxed{2: \text{T}} \boxed{1: \text{H}} \boxed{1: \text{E}} \boxed{1: \Sigma}$) μπορούμε να κάνουμε:

$$\frac{11!}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{11!}{2!} = \frac{39.916.800}{2} = 19.958.400$$

αναγραμματισμούς.

(Η απάντηση: $\frac{11!}{2}$, χωρίς περαιτέρω υπολογισμούς, είναι αρκετή.)

(β) Με τη λέξη ΠΑΠΑΓΑΛΙΑ ($\boxed{2: \Pi} \boxed{4: \text{A}} \boxed{1: \Gamma} \boxed{1: \Lambda} \boxed{1: \text{I}}$) μπορούμε να κάνουμε:

$$\frac{9!}{2! \cdot 4! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{9!}{4! \cdot 2!}$$

αναγραμματισμούς.

(Η απάντηση αυτή, χωρίς περαιτέρω υπολογισμούς, είναι αρκετή.)

Άσκηση 3

Ένα κουτί περιέχει 8 κόκκινες, 3 άσπρες και 9 μπλε σφαίρες. Εάν βγάλουμε 3 σφαίρες στην τύχη **χωρίς επανατοποθέτηση**

- α) Ποιά είναι η πιθανότητα να είναι και οι τρεις κόκκινες.
- β) Ποιά είναι η πιθανότητα να είναι και οι τρεις άσπρες.
- γ) Ποιά είναι η πιθανότητα να είναι δύο κόκκινες και μία μπλε.
- δ) Ποιά είναι η πιθανότητα να είναι τουλάχιστον μία άσπρη.

Λύση:

Το σύνολο όλων των ενδεχομένων είναι $\binom{20}{3} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = 1140$. Άρα κάθε πιθανότητα θα προκύπτει από την διαίρεση των ενδεχομένων που μας ενδιαφέρουν κάθε φορά προς τον συνολικό αριθμό ενδεχομένων.

- α) Σε αυτό το ερώτημα μας ενδιαφέρει ο αριθμός των ενδεχομένων όπου θα τραβήξουμε τρεις από τις 8 κόκκινες μπάλες. Αυτά τα ενδεχόμενα, είναι $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$. Άρα, η πιθανότητα να τραβήξουμε 3 κόκκινες μπάλες, είναι $\frac{56}{1140} = \frac{14}{285}$.
- β) Παρόμοια με το προηγούμενο ερώτημα, προκύπτει ότι το ενδεχόμενο να τραβήξουμε τρεις άσπρες μπάλες, είναι $\binom{3}{3} = \frac{3!}{3! \cdot 1!} = 1$ (Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει και διασθητικά αφού έχουμε μόνο 3 άσπρες μπάλες). Άρα, η πιθανότητα να τραβήξουμε 3 άσπρες μπάλες, είναι $\frac{1}{1140}$.
- γ) Σε αυτό το ερώτημα ψάχνουμε την πιθανότητα να συμβούν δύο γεγονότα. Να τραβήξουμε 2 κόκκινες μπάλες **και** μια μπλε μπάλα. Αυτό σημαίνει, πως έχουμε **γινόμενο** των πιθανών συνδυασμών. Άρα, έχουμε για τις δύο κόκκινες μπάλες $\binom{8}{2} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 28$ συνδυασμούς και για την μια μπλε μπάλα έχουμε $\binom{9}{1} = \frac{9!}{1! \cdot 8!} = 9$ συνδυασμούς. Συνολικά δηλαδή έχουμε $28 \cdot 9 = 252$ ενδεχόμενα, άρα η πιθανότητα είναι $\frac{252}{1140} = \frac{21}{95}$.
- δ) Για αυτό το ερώτημα, είναι πιο εύκολο να υπολογίσουμε πρώτα το ενδεχόμενο να μην τραβήξουμε καμία άσπρη και έπειτα η πιθανότητα να τραβήξουμε τουλάχιστον μία άσπρη θα είναι $1 - P(\text{καμία άσπρη})$. Για να μην τραβήξουμε καμία άσπρη, πρέπει να τραβήξουμε και τις τρεις φορές από τις υπόλοιπες 17 μπάλες. Άρα, το σύνολο αυτών των ενδεχομένων είναι $\binom{17}{3} = \frac{17!}{3! \cdot 14!} = 680$ συνεπώς η πιθανότητα θα είναι $P(\text{καμία άσπρη}) = \frac{680}{1140} = \frac{34}{57}$. Άρα, η πιθανότητα για τουλάχιστον μία άσπρη είναι $1 - P(\text{καμία άσπρη}) = 1 - \frac{34}{57} = \frac{23}{57}$.

Άσκηση 4 (Θέμα 2-Πρόοδος 2021)

Ο κ. Τσαχαλάκης διδάσκει το μάθημα των Πιθανοτήτων. Για την πρόοδο του μαθήματος αποφασίζει να μην δώσει σε όλους τους φοιτητές τα ίδια θέματα προκειμένου να αποφευχθούν φαινόμενα αντιγραφής που παρατηρήθηκαν στις σειρές ασκήσεων. Για καθένα από τα 5 θέματα (Βασικές Έννοιες, Συνδυαστική, Δένδρα και τ.μ., δοκιμές Bernoulli, και από κοινού κατανομές) έχει προετοιμάσει 4 διαφορετικές παραλλαγές. Επιπλέον, αλλάζει και την σειρά των θεμάτων για κάθε εξεταζόμενο. Να υπολογιστεί η πιθανότητα ένας εξεταζόμενος να έχει ως 4ο Θέμα την 3η παραλλαγή του θέματος της Συνδυαστικής.

Λύση:

Για να υπολογίσουμε τη ζητούμενη πιθανότητα, πρέπει να υπολογίσουμε (i) όλα τα δυνατά διαγωνίσματα που μπορούν να προκύψουν και στη συνέχεια (ii) όλα τα δυνατά διαγωνίσματα που περιέχουν ως 4ο θέμα την 3η παραλλαγή του θέματος της συνδιαστικής.

- i) Υπάρχουν $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$ διαφορετικοί τρόποι δημιουργίας ενός διαγωνίσματος επιλέγοντας μια από τις 4 παραλλαγές για κάθε θέμα πχ. $BE_2, \Sigma \nu_1, \Delta \epsilon_4, Ber_4, \Sigma \Pi_3$. Υπάρχουν $5!$ διαφορετικές διατάξεις (μεταθέσεις) πέντε θεμάτων για καθένα από τα 4^5 παραπάνω διαγωνίσματα. Σύμφωνα με τη θεμελιώδη αρχή της απαρίθμησης, το πλήθος όλων των δυνατών διαγωνισμάτων είναι $4^5 \cdot 5! = 1024 \cdot 120 = 122880$
- ii) Αν η 4η θέση στο διαγώνισμα καλύπτεται από την 3η παραλλαγή του θέματος της συνδιαστικής τότε:
Υπάρχουν $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^4$ διαφορετικοί τρόποι δημιουργίας του υπόλοιπου διαγωνίσματος επιλέγοντας μια από τις 4 παραλλαγές για τα υπόλοιπα αντικείμενα.
Υπάρχουν $4!$ διαφορετικές μεταθέσεις των υπολοίπων 4 θεμάτων. Επομένως, όλα τα δυνατά διαγωνίσματα που περιέχουν ως 4ο θέμα την 3η παραλλαγή της Συνδιαστικής είναι $4^4 \cdot 4! = 256 \cdot 24 = 6144$.

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{6144}{122880} = 0.05$