

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 1
Βασικές έννοιες Πιθανοτήτων

Επιμέλεια: Κωνσταντίνα Παπαφραγκάκη

Άσκηση 1

Έστω δύο σύνολα A και B . Αποδείξτε ότι:

(α) $A^c = (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$

(β) $B^c = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c)$

(γ) $(A \cap B)^c = (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B^c)$

(δ) Ρίχνουμε ένα ζάρι. Έστω A το σύνολο των ενδεχομένων να έρθει περιττός αριθμός και B το σύνολο των ενδεχομένων να έρθει αριθμός μικρότερος του 4. Υπολογίστε το σύνολο των πλευρών του ερωτήματος (γ) και εξακριβώστε ότι η ισότητα ισχύει.

Λύση

Θυμίζουμε τις ιδιότητες συνόλων:

Αντιμεταθετική ιδιότητα: $A \cap B = B \cap A$

Προσεταιριστική ιδιότητα: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Επιμεριστική ιδιότητα: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Συμπλήρωμα: $(A^c)^c = A$

$A \cup A^c = \Omega = A \cup \Omega$

$A \cup A^c = \emptyset$

$A \cap \Omega = A$

Νόμοι DeMorgan: $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$
 $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$

(α) $(A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c) = A^c \cap (B \cup B^c)$ (επιμεριστική ιδιότητα) $= A^c \cap \Omega = A^c$

(β) $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c) = B^c \cap (A \cup A^c)$ (επιμεριστική ιδιότητα) $= B^c \cap \Omega = B^c$

(γ) $(A \cap B)^c = (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B^c) = A^c \cup (A \cap B^c)$ (από την απόδειξη του (α) ερωτήματος) $= (A^c \cup A) \cap (A^c \cup B^c)$ (επιμεριστική ιδιότητα) $= \Omega \cap (A^c \cup B^c) = (A^c \cup B^c) = (A \cap B)^c$ (Νόμοι DeMorgan)

(δ) $A = \{ 1, 3, 5 \}$, $B = \{ 1, 2, 3 \}$

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}(A \cap B)^c &= \{1, 3\}^c = \{2, 4, 5, 6\} \\ A^c \cap B &= \{2, 4, 6\} \cap \{1, 2, 3\} = \{2\} \\ A^c \cap B^c &= \{2, 4, 6\} \cap \{4, 5, 6\} = \{4, 6\} \\ A \cap B^c &= \{1, 3, 5\} \cap \{4, 5, 6\} = \{5\}\end{aligned}$$

$$\text{Επομένως, } (A \cap B)^c = \{2, 4, 5, 6\} = \{2\} \cup \{4, 6\} \cap \{5\} = (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B^c)$$

Άσκηση 2

Ένα τυχαίο πείραμα έχει δειγματοχώρο $\Omega = \{A, B, C\}$. Γνωρίζουμε ότι $\Pi(A \cup C) = \frac{9}{16}$, $\Pi(A \cup B) = \frac{3}{4}$ ότι τα γεγονότα A, B, C είναι ξένα μεταξύ τους. Υπολογίστε τις πιθανότητες $\Pi(A), \Pi(B)$ και $\Pi(C)$.

Λύση

$$\begin{aligned}\text{Τα γεγονότα είναι ξένα μεταξύ τους, οπότε} \\ \Pi(A \cup C) &= \Pi(A) + \Pi(C) = \frac{9}{16} \Rightarrow \Pi(C) = \frac{9}{16} - \Pi(A) \quad (1) \\ \Pi(A \cup B) &= \Pi(A) + \Pi(B) = \frac{3}{4} \Rightarrow \Pi(B) = \frac{3}{4} - \Pi(A) \quad (2)\end{aligned}$$

$$\text{Ο δειγματοχώρος } \Omega \text{ αποτελείται από τα γεγονότα } A, B, C, \Pi(A) + \Pi(B) + \Pi(C) = 1$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\Pi(A) + \Pi(B) + \Pi(C) &= 1 \Rightarrow \\ \Pi(A) + \frac{3}{4} - \Pi(A) + \frac{9}{16} - \Pi(A) &= 1 \Rightarrow \\ -\Pi(A) + \frac{21}{16} &= 1 \Rightarrow \\ -\Pi(A) &= -\frac{5}{16} \Rightarrow \\ \Pi(A) &= \frac{5}{16}\end{aligned}$$

$$\text{Από την σχέση (1) έχουμε ότι: } \Pi(C) = \frac{9}{16} - \frac{5}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \text{ και από την σχέση (2): } \Pi(B) = \frac{3}{4} - \frac{5}{16} = \frac{7}{16}$$

$$\text{Επομένως, οι ζητούμενες πιθανότητες είναι: } \Pi(A) = \frac{5}{16}, \Pi(B) = \frac{7}{16}, \Pi(C) = \frac{1}{4}.$$

Άσκηση 3

Σε μία ομάδα φοιτητών, το 60% δεν ασχολείται ούτε με το ποδόσφαιρο ούτε με το μπάσκετ, το 20% παίζει μπάσκετ και το 30% παίζει ποδόσφαιρο. Αν διαλέξουμε στην τύχη ένα φοιτητή, ποια η πιθανότητα ο μαθητής να ασχολείται:

- (α) ποδόσφαιρο ή μπάσκετ;
- (β) ποδόσφαιρο και μπάσκετ;

Λύση

Έστω Π το γεγονός να ασχολούνται οι φοιτητές με το ποδόσφαιρο και M με το μπάσκετ. Από τα δεδομένα γνωρίζουμε ότι:

$$\begin{aligned}\Pi(P^c \cap M^c) &= 0.6 \\ \Pi(M) &= 0.2 \\ \Pi(P) &= 0.3\end{aligned}$$

Τότε:

(α) Η πιθανότητα να ασχολούνται οι φοιτητές με το μπάσκετ ή με το ποδόσφαιρο είναι:

$$\Pi(P \cup M) = 1 - \Pi(P^c \cap M^c) = 1 - 0.6 = 0.4 \text{ (Νόμος DeMorgan)}$$

(β) Η πιθανότητα να ασχολούνται οι φοιτητές με το μπάσκετ και με το ποδόσφαιρο είναι:

$$\Pi(P \cup M) = \Pi(M) + \Pi(\Pi) - \Pi(P \cap M) =$$

$$0.4 = 0.2 + 0.3 - \Pi(P \cap M) =$$

$$0.4 = 0.5 - \Pi(P \cap M) =$$

$$\Pi(P \cap M) = 0.1$$

Άσκηση 4

Δείξτε ότι η πιθανότητα να συμβεί μόνο ένα από τα γεγονότα E, F είναι $\Pi(E) + \Pi(F) - 2\Pi(EF)$.

Λύση

$$\begin{aligned}\Pi(EF^c \cup E^cF) &= \Pi(EF^c) + \Pi(E^cF) - \Pi(EF^cE^cF) = \Pi(EF^c) + \Pi(E^cF) = \Pi(E) - \Pi(EF) + \Pi(E) - \Pi(EF) \\ &= \Pi(E) + \Pi(F) - 2\Pi(EF), \text{ αφού } \Pi(EF^c) = \Pi(E) * \Pi(F^c) = \Pi(E) * (1 - \Pi(F)) = \Pi(E) - \Pi(E) * \Pi(F) = \Pi(E) - \Pi(EF), \text{ ομοίως } \Pi(E^cF) = \Pi(F) - \Pi(EF)\end{aligned}$$

Άσκηση 5

Η Μαρία και η Χριστίνα διαλέγουν τυχαία η κάθε μία έναν αριθμό μεταξύ του 0 και του 1 σύμφωνα με τον ομοιόμορφο πιθανοτικό νόμο. Θεωρείστε τα ακόλουθα δεδομένα:

$$A = \{ \text{Η απόλυτη τιμή της διαφοράς των δύο αριθμών είναι μεγαλύτερη από } 1/3 \}$$

$$B = \{ \text{Τουλάχιστον ένας από τους δύο αριθμούς είναι μεγαλύτερος από } 2/3 \}$$

$$C = \{ \text{Το άθροισμα των δύο αριθμών είναι } 1 \}$$

$$D = \{ \text{Ο αριθμός της Μαρίας είναι μεγαλύτερος από } 2/3 \}$$

Υπολογίστε τις πιθανότητες: $\Pi(A), \Pi(B), \Pi(A \cap B), \Pi(C), \Pi(D), \Pi(A \cup D)$

Hint: Χρησιμοποιήστε γραφικές παραστάσεις για να αναπαραστήσετε τα ενδεχόμενα. Ο υπολογισμός των πιθανοτήτων ανάγεται σε υπολογισμό εμβαδών.

Λύση

Στο σχήμα 1 βρίσκεται η γεωμετρική ερμηνεία των γεγονότων. Από το κάθε σχήμα μπορεί να βρεθεί το αντίστοιχο εμβαδόν που ισούται με την πιθανότητα του συγκεκριμένου γεγονότος.

$$(\alpha) \Pi(A) = 2\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} \text{ (εμβαδόν τριγώνου: } \frac{1}{2} * \text{βάση} * \text{ύψος)}$$

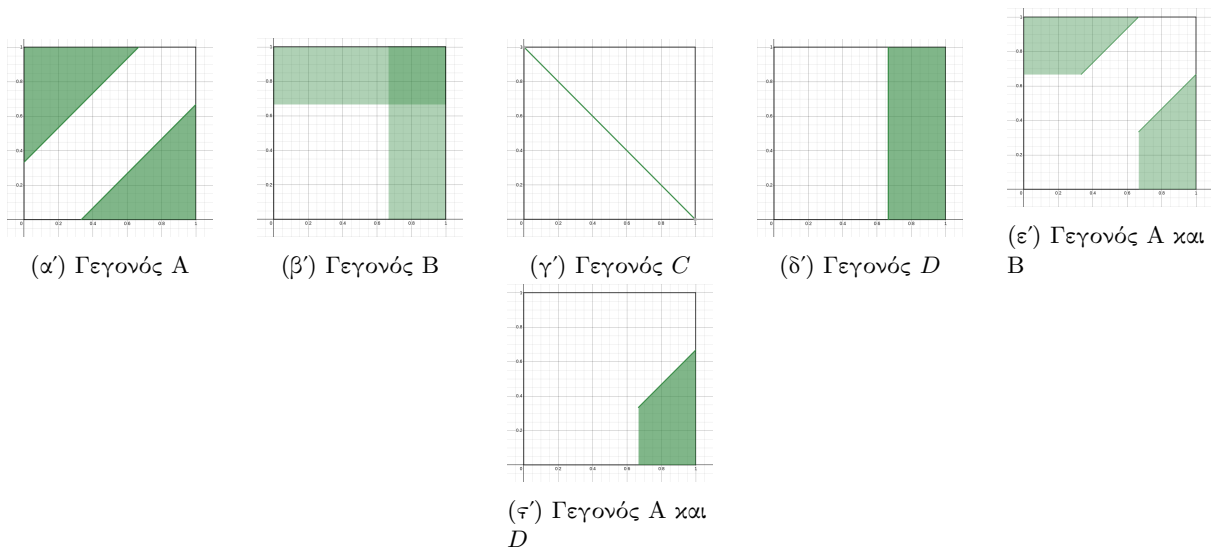
$$(\beta) \Pi(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \text{ (εμβαδόν του ενός παραλληλογράμμου + εμβαδόν δεύτερου παραλληλογράμμου - κοινά σημεία (σκουρόχρωμο πράσινο == τετράγωνο), εμβαδόν παραλληλογράμμου: } \text{βάση} * \text{ύψος, εμβαδόν τετραγώνου: } \text{βάση} * \text{βάση)}$$

$$(\gamma) \Pi(A \cap B) = 2\left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \text{ (εμβαδόν των δύο τραπεζίων που σχηματίζονται από την τομή του A και του B γεγονότος, εμβαδόν τραπεζίου: } \frac{1}{2} \text{ (μικρή βάση και μεγάλη βάση)} * \text{ύψος)}$$

$$(\delta) \Pi(C) = 0, \text{ αφού το σχήμα δεν έχει εμβαδόν}$$

$$(\epsilon) \Pi(D) = \frac{1}{3} \text{ (εμβαδόν παραλληλογράμμου: } \text{βάση} * \text{ύψος)}$$

$$(\sigma\tau) \Pi(A \cap D) = \frac{P(A \cap B)}{2} = \frac{\frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{6}$$



Σχήμα 1: Η γεωμετρική ερμηνεία των γεγονότων A,B,C, D της άσκησης 5. Οι περιοχές με το πράσινο χρώμα αναπαριστούν το αντίστοιχο γεγονός με τον x άξονα να υποδηλώνει τον αριθμό που διάλεξε η Μαρία και τον y άξονα τον αριθμό που διάλεξε η Χριστίνα.

Άσκηση 6

Ένα παιχνίδι περιλαμβάνει ένα ζάρι με 6 πλευρές και ένα κέρμα. Ο παίκτης ρίχνει το ζάρι και ρίχνει το κέρμα.

(α) Περιγράψτε τον δειγματοχώρο Ω .

(β) Έστω A το γεγονός ότι το ζάρι φέρνει περιττό αριθμό. Περιγράψτε το γεγονός A και βρείτε την πιθανότητα $\Pi(A)$.

(γ) Έστω B το γεγονός ότι το κέρμα φέρνει κορώνα και το ζάρι φέρνει αριθμό μεγαλύτερο από 1. Περιγράψτε το γεγονός B και βρείτε την πιθανότητα $\Pi(B)$.

Λύση

(α) Ο δειγματοχώρος Ω είναι: $\Omega = \{ 1K, 2K, 3K, 4K, 5K, 6K, 1Γ, 2Γ, 3Γ, 4Γ, 5Γ, 6Γ \}$

(β) Οι πιθανοί συνδυασμοί για το γεγονός A είναι $\{ 1K, 1Γ, 3K, 3Γ, 5K, 5Γ \}$. Οπότε, η πιθανότητα (A) είναι ο λόγος του συνολικού αριθμού των περιττών αριθμών για ένα ζάρι προς τον συνολικό αριθμό του δειγματοχώρου Ω , άρα:

$$\Pi(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

(γ) Οι πιθανοί συνδυασμοί για το γεγονός B είναι $\{ 2K, 3K, 4K, 5K, 6K \}$ για το ζάρι και το κέρμα. Άρα: $\Pi(B) = \frac{5}{12}$