

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Τελική Εξέταση
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
26 Ιανουαρίου 2024 - Διάρκεια: 3 Ώρες

Θέμα 1 - 20 μονάδες. Μία συνεχής τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X έχει την ακόλουθη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

$$f_X(x) = \begin{cases} c(1 - 0.2|x|), & |x| \leq 5, \\ 0 & \text{αλλού,} \end{cases}$$

όπου c είναι μία σταθερά.

- (α) Να δώσετε τη γραφική παράσταση της σ.π.π. και να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς c .
- (β) Υπολογίστε τη μέση τιμή, $E[X]$, και τη διασπορά, σ_X^2 , της X .
- (γ) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(x)$, της X και δώστε τη γραφική παράστασή της.
- (δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(|X| > 4)$.

Θέμα 2 - 20 μονάδες. Το δικαστήριο της Περιφέρειας Κρήτης έχει δύο δικαστές. Ο δικαστής Α αποφασίζει ποινές με διάρκεια X , συνεχή τ.μ. ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[1, 2]$ (χρόνια), $X \sim U[1, 2]$. Ο δικαστής Β αποφασίζει ποινές με διάρκεια Y , συνεχή τ.μ. ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[0, 3]$ (χρόνια), $Y \sim U[0, 3]$. Πριν τη δίκη, η υπόθεση ενός κατηγορούμενου ανατίθεται σε έναν από τους δύο δικαστές ρίχνοντας ένα *δίκαιο* κέρμα. Έστω Z η διάρκεια της ποινής στην οποία καταδικάζεται ο κατηγορούμενος.

- (α) Υπολογίστε την πιθανότητα ο κατηγορούμενος να καταδικάστηκε σε ποινή μεγαλύτερη των 9 μηνών.
- (β) Ποια είναι η πιθανότητα να δίκασε ο δικαστής Α δεδομένου ότι η διάρκεια της ποινής στον κατηγορούμενο ήταν μεγαλύτερη των 9 μηνών;

Θέμα 3 - 20 μονάδες. Ένα στατιστικό μοντέλο που έχει προταθεί για το επαγγελματικό πρωτάθλημα μπάσκετ των ΗΠΑ προβλέπει ότι όταν συναντώνται δύο σχετικά ισοδύναμες ομάδες, ο αριθμός των πόντων που σκοράρει σε μία περίοδο η εντός έδρας ομάδα μείον τον αριθμό των πόντων που σκοράρει η φιλοξενούμενη ομάδα είναι μία *κανονική* τ.μ. με μέση τιμή 1 και διασπορά 5. Επίσης, το μοντέλο υποθέτει ότι οι διαφορές σκοραρίσματος κατά τις 4 περιόδους είναι ανεξάρτητες τ.μ.

Στη συνέχεια, εκφράστε την απάντησή σας βάσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(x)$.

- (α) Ποια η πιθανότητα να κερδίσει η εντός έδρας ομάδα;
- (β) Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα να κερδίσει η εντός έδρας ομάδα δεδομένου ότι στο ημίχρονο είναι πίσω στο σκορ κατά 10 πόντους;
- (γ) Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα να κερδίσει η εντός έδρας ομάδα δεδομένου ότι στο τέλος της πρώτης περιόδου προηγείται με 10 πόντους;

Θέμα 4 - 25 μονάδες. Οι συνεχείς τ.μ. X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.):

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c & \text{για } 0 \leq y < x \leq 2, \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Έστω τα δύο γεγονότα $A = \{X \geq 0.5\}$ και $B = \{Y < 1 - X\}$.

- (α) Δώστε τη γραφική παράσταση της από κοινού σ.π.π. και υπολογίστε τη σταθερά c .
- (β) Υπολογίστε την περιθώρια σ.π.π., $f_X(x)$, της τ.μ. X καθώς και την περιθώρια σ.π.π., $f_Y(y)$, της τ.μ. Y . Είναι οι τ.μ. X και Y ανεξάρτητες μεταξύ τους;
- (γ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(B/A)$.
- (δ) Υπολογίστε και δώστε τη γραφική παράσταση της δεσμευμένης σ.π.π. της X δεδομένου του $Y = 0.5$, $f_{X/Y}(x/y = 0.5)$.
- (ε) Δεδομένου του $Y = 0.5$, ποια είναι η δεσμευμένη μέση τιμή και διασπορά της X ;

Θέμα 5 - 25 μονάδες. Έστω οι *ανεξάρτητες και όμοια κατανομημένες* τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_n$ με κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) $f_X(x)$ και αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) $F_X(x)$.

- (α) Υπολογίστε την α.σ.κ. $F_Y(y)$ και τη σ.π.π. $f_Y(y)$ της τ.μ. $Y = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ συναρτήσει των $F_X(x)$ και $f_X(x)$.
- (β) Ένα σύστημα αποτελείται από 10 εξαρτήματα των οποίων η διάρκεια ζωής ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ . Κάθε εξάρτημα χαλάει ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα και το σύστημα παύει να λειτουργεί όταν χαλάει το *τελευταίο* εξάρτημα. Ποια πρέπει να είναι η μέση διάρκεια ζωής των εξαρτημάτων ώστε το σύστημα να λειτουργεί για τουλάχιστον 10 μέρες με πιθανότητα 99%;

Βοήθεια: Για το (β) χρησιμοποιείτε την ανάλυση και το αποτέλεσμα του (α).