

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Ημερομηνία Ανάθεσης: 15/12/2023

Ημερομηνία Παράδοσης: 05/01/2024

Λύσεις Έκτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

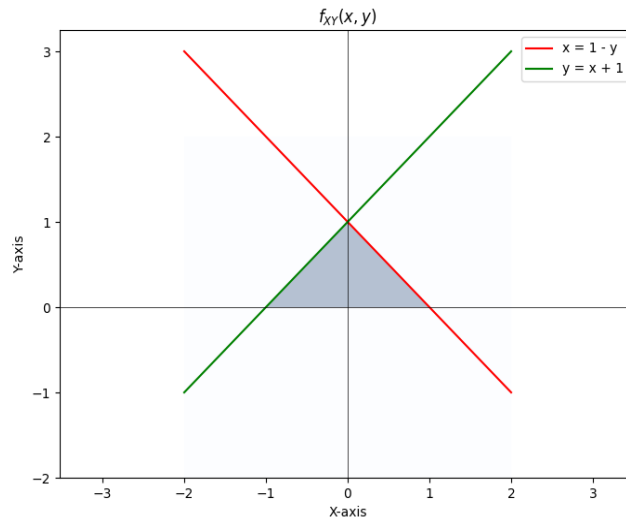
Δυο συνεχείς τ.μ X και Y έχουν την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π):

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} c, & y \geq 0, |x| + y \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- (α) Να γίνει η γραφική παράσταση της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας.
(β) Να υπολογισθεί η σταθερά c .
(γ) Να υπολογιστούν οι περιθώριες σ.π.π., $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ των τυχαίων μεταβλητών X και Y , καθώς και να δώσετε τις γραφικές τους παραστάσεις. Είναι οι τ.μ X και Y ανεξάρτητες;
(δ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(X \geq 2Y)$.
(ε) Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(X + Y \geq 1/2)$.

Λύση:

(α) Η γραφική παράσταση της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας φαίνεται παρακάτω:1



Σχήμα 1: Η απο κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των X, Y

(β) Υπολογίζουμε τη σταθερά c ολοκληρώνοντας την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$|x| + y \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1 - y \Rightarrow y - 1 \leq x \leq 1 - y$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy &= 1 \Rightarrow \int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} c dx dy = 1 \Rightarrow c \int_0^1 [x]_{y-1}^{1-y} dy = 1 \Rightarrow \\ c \int_0^1 (1 - y - (y - 1)) dy &= 1 \Rightarrow c \int_0^1 (2 - 2y) dy = 1 \Rightarrow 2c \int_0^1 (1 - y) dy = 1 \Rightarrow \\ 2c \left[y - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 &= 1 \Rightarrow 2c \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 1 \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot c = 1 \Rightarrow c = 1 \end{aligned}$$

Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε και το εμβαδόν του χωρίου που παριστάνεται στο σχήμα, και έχουμε : $c \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1 \Rightarrow c = 1$

(γ) Έχουμε:

Για $-1 \leq x \leq 0$

$$f_X(x) = \int_0^{1+x} c dy = \int_0^{1+x} 1 dy = [y]_0^{1+x} = 1 + x$$

Για $0 \leq x \leq 1$

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} c dy = \int_0^{1-x} 1 dy = [y]_0^{1-x} = 1 - x$$

Άρα έχουμε:

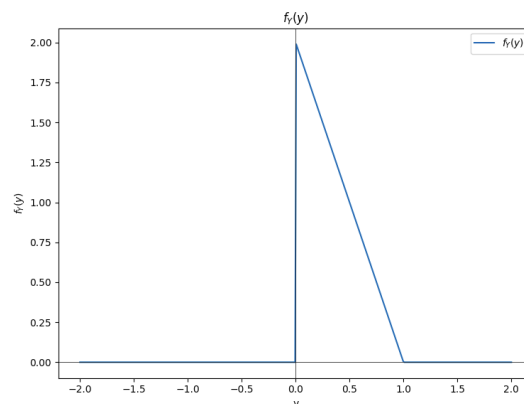
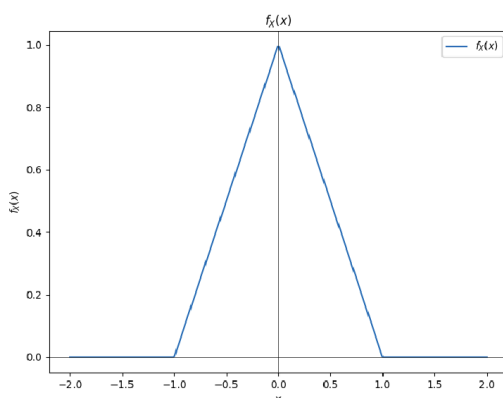
$$f_X(x) = \begin{cases} 1 + x & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Ομοίως, για $0 \leq y \leq 1$,

$$f_Y(y) = \int_{y-1}^{1-y} c dx = \int_{y-1}^{1-y} 1 dx = [x]_{y-1}^{1-y} = 1 - y - (y - 1) = 2 - 2y = 2(1 - y)$$

Οπότε:

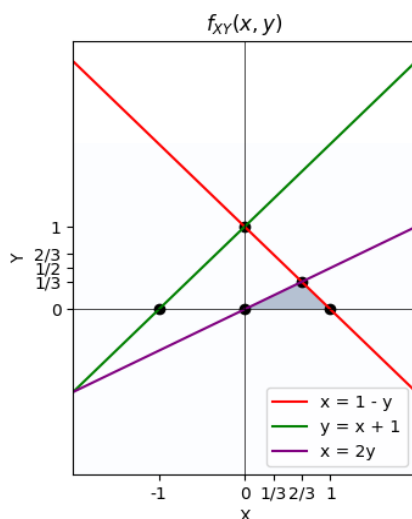
$$f_Y(y) = \begin{cases} 2(1 - y) & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



Σχήμα 2: Η περιθωριακή σ.π.π της X (αριστερά) και η περιθωριακή σ.π.π της Y (δεξιά)

Από το Σχήμα ;; παρατηρούμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές X, Y δεν είναι ανεξάρτητες, εφόσον ισχύει : $f_{XY}(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$

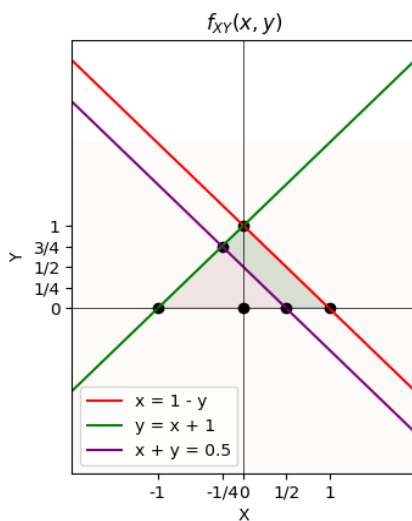
(δ) Υπολογίζουμε τη συγκεκριμένη πιθανότητα από το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν στο σχήμα 3:



Σχήμα 3: Οπτικοποίηση της πιθανότητας $P(X \geq 2Y)$

$$P(X \geq 2Y) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \right) = \frac{1}{6}$$

(ε) Υπολογίζουμε τη συγκεκριμένη πιθανότητα από το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν αφαιρώντας το μικρό τρίγωνο που σχηματίζεται στο σχήμα 4, από το μεγάλο:



Σχήμα 4: Οπτικοποίηση της πιθανότητας $P(X + Y \geq \frac{1}{2})$

$$P(X + Y \geq 1/2) = E_2 - E_1 = \frac{1}{2} (1 \cdot 2) - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \right) \right) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

Άσκηση 2.

Σε ένα μαγικό βασίλειο, οι μάγοι Άλεξ και Βάλор ανταγωνίζονται για να αποδείξουν ποιος είναι ο ισχυρότερος. Ο χρόνος σε λεπτά, που μπορούν να διατηρήσουν τα μαγικά τους ξόρκια, δίνεται από τις τυχαίες μεταβλητές X και Y . Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{X,Y}(x, y)$ δίνεται από τον τύπο:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c(x-y)^2, & 0 \leq x, y < 10 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

όπου $c \in \mathbb{R}$ είναι μια σταθερά.

(α) Να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς c .

(β) Να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$.

(γ) Να βρεθεί η από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F_{X,Y}(x, y)$.

(δ) Ποια είναι η πιθανότητα κανένας από τους δύο μάγους να διατηρήσει τα ξόρκια του για περισσότερο από δύο λεπτά;

(ε) Ποια είναι η πιθανότητα τουλάχιστον ένας από τους δύο μάγους να διατηρήσει τα ξόρκια του για περισσότερο από πέντε λεπτά;

Λύση:

(α) Για να αποτελεί η $f_{X,Y}(x, y)$ μία έγκυρη από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, θα πρέπει να ικανοποιεί την Συνθήκη Κανονικοποίησης:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy dx &= 1 \Leftrightarrow \int_0^{10} \int_0^{10} [c(x-y)^2] dy dx = 1 \Leftrightarrow c \int_0^{10} \int_0^{10} (x^2 - 2xy + y^2) dy dx = 1 \\ &\Leftrightarrow c \int_0^{10} \left(x^2 \left[y \right]_0^{10} - 2x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{10} + \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{10} \right) dx = 1 \Leftrightarrow c \int_0^{10} \left(10x^2 - 100x + \frac{1000}{3} \right) dx = 1 \\ &\Leftrightarrow c \left(10 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{10} - 100 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{10} + \frac{1000}{3} \left[x \right]_0^{10} \right) = 1 \Leftrightarrow c \left(10 \frac{1000}{3} - 100 \frac{100}{2} + \frac{1000}{3} 10 \right) = 1 \\ &\Leftrightarrow c \left(\frac{10000}{3} - \frac{10000}{2} + \frac{10000}{3} \right) = 1 \Leftrightarrow c \left(\frac{20000}{3} - \frac{10000}{2} \right) = 1 \Leftrightarrow c \left(\frac{10000}{6} \right) = 1 \Leftrightarrow c = 6 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Άρα, τελικά, η από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_{X,Y}(x, y)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 6 \cdot 10^{-4}(x-y)^2 & 0 \leq x < 10, 0 \leq y < 10 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(β) Με γνωστή την από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας των X, Y , η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_X(x)$ δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$$

Για $0 \leq x < 10$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = \int_0^{10} \left(6 \cdot 10^{-4}(x-y)^2 \right) dy = 6 \cdot 10^{-4} \int_0^{10} (x-y)^2 dy \\ &= 6 \cdot 10^{-4} \int_0^{10} \left(x^2 - 2xy + y^2 \right) dy = 6 \cdot 10^{-4} \left(x^2 \left[y \right]_0^{10} - 2x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{10} + \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{10} \right) \\ &= 6 \cdot 10^{-4} \left(10x^2 - 100x + \frac{1000}{3} \right) = 10^{-4} \left(60x^2 - 600x + \frac{6000}{3} \right) = 2 \cdot 10^{-3} (3x^2 - 30x + 100) \end{aligned}$$

Άρα, τελικά, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_X(x)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2 \cdot 10^{-3}(3x^2 - 30x + 100) & 0 \leq x < 10 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Με γνωστή την από κοινού Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας των X, Y , η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας $f_Y(y)$ δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$$

Για $0 \leq y < 10$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx = \int_0^{10} \left(6 \cdot 10^{-4}(x - y)^2 \right) dx = 6 \cdot 10^{-4} \int_0^{10} (x - y)^2 dx \\ &= 6 \cdot 10^{-4} \int_0^{10} (x^2 - 2xy + y^2) dx = 6 \cdot 10^{-4} \left(\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{10} - 2y \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{10} + y^2 \left[x \right]_0^{10} \right) \\ &= 6 \cdot 10^{-4} \left(\frac{1000}{3} - 100y + 10y^2 \right) = 10^{-4} \left(60y^2 - 600y + \frac{6000}{3} \right) = 2 \cdot 10^{-3}(3y^2 - 30y + 100) \end{aligned}$$

Άρα, τελικά, η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, $f_Y(y)$, θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2 \cdot 10^{-3}(3y^2 - 30y + 100) & 0 \leq y < 10 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Παρατήρηση: Η $f_Y(y)$ θα μπορούσε να υπολογιστεί εναλλακτικά θέτοντας στον τύπο της $f_X(x)$ όπου x το y , παρατηρώντας ότι η $f_{X,Y}(x, y)$ είναι συμμετρική ως προς x, y .

(γ) Με γνωστή την από κοινού Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας, η από κοινού Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής δίνεται από τον εξής τύπο:

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t) dt ds$$

i Για $\{(x, y) : x < 0 \text{ ή } y < 0\} \Leftrightarrow$

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t) dt ds = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y 0 dt ds = 0$$

ii Για $\{(x, y) : 0 \leq x < 10 \text{ και } 0 \leq y < 10\} \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t) dt ds = \int_0^x \int_0^y f(s, t) dt ds = \int_0^x \int_0^y 6 \cdot 10^{-4}(s - t)^2 dt ds \\ &= 6 \cdot 10^{-4} \int_0^x \int_0^y (s^2 - 2st + t^2) dt ds = 6 \cdot 10^{-4} \int_0^x \left(s^2 \left[t \right]_0^y - 2s \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^y + \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^y \right) ds \\ &= 6 \cdot 10^{-4} \int_0^x \left(s^2 y - sy^2 + \frac{y^3}{3} \right) ds = 6 \cdot 10^{-4} \left(y \left[\frac{s^3}{3} \right]_0^x - y^2 \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^x + \frac{y^3}{3} \left[s \right]_0^x \right) \\ &= 6 \cdot 10^{-4} \left(\frac{x^3 y}{3} - \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{xy^3}{3} \right) = 10^{-4} (2 \cdot x^3 y - 3 \cdot x^2 y^2 + 2 \cdot xy^3) = 10^{-4} xy(2x^2 - 3xy + 2y^2) \end{aligned}$$

iii Για $\{(x, y) : 0 \leq x < 10 \text{ και } y \geq 10\} \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t) dt ds = \int_0^x \int_0^{10} f(s, t) dt ds = \int_0^x \int_0^{10} 6 \cdot 10^{-4} (s - t)^2 dt ds \\ &= 6 \cdot 10^{-4} \int_0^x \int_0^{10} (s^2 - 2st + t^2) dt ds = 6 \cdot 10^{-4} \int_0^x \left(s^2 \left[t \right]_0^{10} - 2s \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{10} + \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{10} \right) ds \\ &= 6 \cdot 10^{-4} \int_0^x \left(10s^2 - 100s + \frac{1000}{3} \right) ds = 6 \cdot 10^{-4} \left(10 \left[\frac{s^3}{3} \right]_0^x - 100 \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^x + \frac{1000}{3} \left[s \right]_0^x \right) \\ &= 6 \cdot 10^{-4} \left(\frac{10x^3}{3} - \frac{100x^2}{2} + \frac{1000x}{3} \right) = 10^{-4} (20 \cdot x^3 - 300 \cdot x^2 + 2000 \cdot x) = 2 \cdot 10^{-3} \cdot x(x^2 - 15x + 100) \end{aligned}$$

iv Για $\{(x, y) : x \geq 10 \text{ και } 0 \leq y < 10\} \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t) dt ds = \int_0^{10} \int_0^y f(s, t) dt ds = \int_0^{10} \int_0^y 6 \cdot 10^{-4} (s - t)^2 dt ds \\ &= 6 \cdot 10^{-4} \int_0^{10} \int_0^y (s^2 - 2st + t^2) dt ds = 6 \cdot 10^{-4} \int_0^{10} \left(s^2 \left[t \right]_0^y - 2s \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^y + \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^y \right) ds \\ &= 6 \cdot 10^{-4} \int_0^{10} \left(s^2 y - sy^2 + \frac{y^3}{3} \right) ds = 6 \cdot 10^{-4} \left(y \left[\frac{s^3}{3} \right]_0^{10} - y^2 \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^{10} + \frac{y^3}{3} \left[s \right]_0^{10} \right) \\ &= 6 \cdot 10^{-4} \left(\frac{1000y}{3} - \frac{100y^2}{2} + \frac{10y^3}{3} \right) = 10^{-4} (20 \cdot y^3 - 300 \cdot y^2 + 2000 \cdot y) = 2 \cdot 10^{-3} \cdot y(y^2 - 15y + 100) \end{aligned}$$

v Για $\{(x, y) : x \geq 10 \text{ και } y \geq 10\} \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t) dt ds = \int_0^{10} \int_0^{10} f(s, t) dt ds = \int_0^{10} \int_0^{10} 6 \cdot 10^{-4} (s - t)^2 dt ds \\ &= 6 \cdot 10^{-4} \int_0^{10} \int_0^{10} (s^2 - 2st + t^2) dt ds = 6 \cdot 10^{-4} \int_0^{10} \left(s^2 \left[t \right]_0^{10} - 2s \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{10} + \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{10} \right) ds \\ &= 6 \cdot 10^{-4} \int_0^{10} \left(10s^2 - 100s + \frac{1000}{3} \right) ds = 6 \cdot 10^{-4} \left(10 \left[\frac{s^3}{3} \right]_0^{10} - 100 \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^{10} + \frac{1000}{3} \left[s \right]_0^{10} \right) \\ &= 6 \cdot 10^{-4} \left(\frac{10000}{3} - \frac{10000}{2} + \frac{10000}{3} \right) = 10^{-4} (20000 - 30000 + 20000) = 10^{-4} \cdot 10000 = 1 \end{aligned}$$

Άρα, η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (CDF) θα είναι τελικά:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ ή } y < 0 \\ 10^{-4}xy(2x^2 + 2y^2 - 3xy) & 0 \leq x < 10 \text{ και } 0 \leq y < 10 \\ 2 \cdot 10^{-3} \cdot x(x^2 - 15x + 100) & 0 \leq x < 10 \text{ και } y \geq 10 \\ 2 \cdot 10^{-3} \cdot y(y^2 - 15y + 100) & x \geq 10 \text{ και } 0 \leq y < 10 \\ 1 & x \geq 10 \text{ και } y \geq 10 \end{cases}$$

(δ) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της από κοινού Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής, έχουμε:

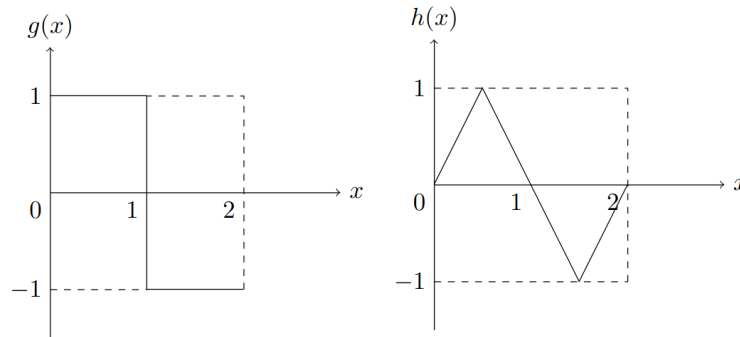
$$P(X \leq 2, Y \leq 2) = F(2, 2) = 10^{-4} \cdot 2 \cdot 2 (2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 \cdot 2) = 4 \cdot 10^{-4} (8 + 8 - 12) = 16 \cdot 10^{-4} = \frac{16}{10000} = \frac{1}{625}$$

(ε) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της από κοινού Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(\{X > 5\} \cup \{Y > 5\}) &= 1 - P(X \leq 5, Y \leq 5) = 1 - F(5, 5) = 1 - 10^{-4} \cdot 5 \cdot 5 (2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^2 - 3 \cdot 5 \cdot 5) \\ &= 1 - 25 \cdot 10^{-4} (50 + 50 - 75) = 1 - 625 \cdot 10^{-4} = \frac{9375}{10000} = \frac{15}{16} \end{aligned}$$

Άσκηση 3.

Έστω X συνεχής τ.μ. ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα τιμών $[0, 2]$.



Σχήμα 5: Ο τετραγωνικός παλμός (αριστερά) και ο τριγωνικός παλμός (δεξιά)

(α) Ορίζουμε την τ.μ. $Y = g(X)$, όπου η συνάρτηση $g(X)$ είναι ο λεγόμενος 'τετραγωνικός παλμός' που φαίνεται στο Σχήμα 1. Είναι η τ.μ. Y διακριτή ή συνεχής; Να υπολογίσετε και να δώσετε τη γραφική παράσταση της κατανομής της.

(β) Ορίζουμε την τ.μ. $Z = h(X)$, όπου η συνάρτηση $h(X)$ είναι ο λεγόμενος 'τριγωνικός παλμός' που φαίνεται στο Σχήμα 1. Είναι η τ.μ. Z διακριτή ή συνεχής; Να υπολογίσετε και να δώσετε τη γραφική παράσταση της κατανομής της. **Βοήθεια:** Υπολογίστε πρώτα την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_Z(z)$, της Z .

(γ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(Y > 0 | Z > 0)$.

Λύση:

(α) Θυμόμαστε ότι η α.σ.κ μιας συνεχής ομοιόμορφης τυχαίας κατανομής, ορισμένη με $x \in [a, b]$ είναι:

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{x - a}{b - a}$$

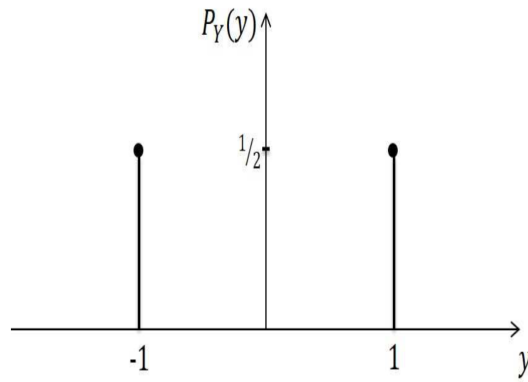
Η τ.μ. Y είναι διακριτή και παίρνει τις τιμές -1 και 1 με αντίστοιχες πιθανότητες:

$$\begin{aligned} P_Y(y) &= P(Y = 1) = P(0 \leq X \leq 1) = P(X \leq 1) - P(X \leq 0) = \\ &= F_X(1) - F_X(0) = \frac{1-0}{2-0} - \frac{0-0}{2-0} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_Y(y) &= P(Y = -1) = P(1 \leq X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) = \\ &= F_X(2) - F_X(1) = \frac{2-0}{2-0} - \frac{1-0}{2-0} = \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Άρα:

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & y = \pm 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Σχήμα 6: Η σ.μ.π. της Y

(β) Η τ.μ. Z είναι συνεχής και παίρνει τις τιμές στο διάστημα $[-1, 1]$:

- Για $0 \leq z < 1$:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = 1 - P(Z > z) = 1 - P\left(\frac{z}{2} \leq X \leq \frac{2-z}{z}\right) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2-z}{2} - \frac{z}{2}\right) = \frac{1+z}{2}$$

- Για $-1 \leq z < 0$:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P\left(\frac{2-z}{2} \leq X \leq \frac{4+z}{z}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{4+z}{2} - \frac{2-z}{2}\right) = \frac{1+z}{2}$$

Επομένως:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < -1 \\ \frac{1+z}{2}, & -1 \leq z \leq 1 \\ 1, & z > 1 \end{cases}$$

Για να βρούμε την σ.π.π. της z , παραγωγίζοντας την α.σ.κ. της.

- Για $z < -1$:

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \frac{d0}{dz} = 0$$

- Για $-1 \leq z \leq 1 \Rightarrow |z| \leq 1$:

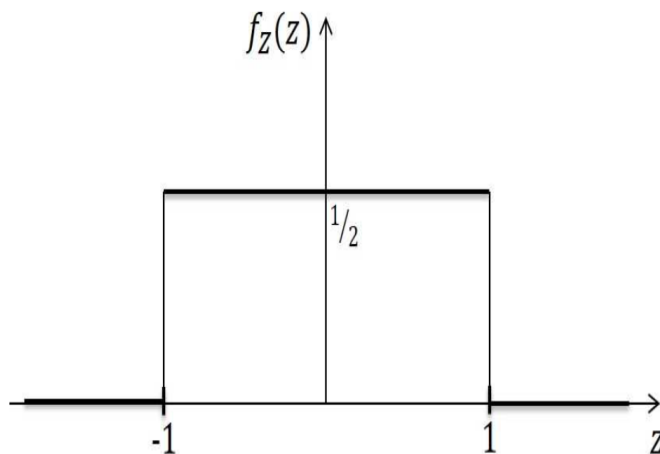
$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \frac{d\left(\frac{1+z}{2}\right)}{dz} = \frac{d\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{2}\right)}{dz} = \frac{1}{2}$$

- Για $z > 1$:

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \frac{d1}{dz} = 0$$

Άρα:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |z| \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Σχήμα 7: Η σ.π.π. της Z

(γ) Βλέπουμε ότι όταν $Z > 0$, η τ.μ X παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, 1]$ και επομένως $Y = +1$ με βεβαιότητα.

$$P(Y > 0 | Z > 0) = 1$$

Δηλαδή:

$$P(Y > 0 | Z > 0) = \frac{P(Y > 0 \cap Z > 0)}{P(Z > 0)} = \frac{P(0 \leq X \leq 1 \cap 0 \leq X \leq 1)}{P(0 \leq X \leq 1)} = 1$$

Δηλαδή, η τ.μ. Z είναι ομοιόμορφη με πεδίο τιμών το $[-1, 1]$.

Άσκηση 4.

Μία τυπική τυχαία μεταβλητή Cauchy έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad -\infty \leq x \leq \infty$$

Θα δείξουμε ότι αν η X είναι μία τυπική τ.μ. Cauchy, τότε το ίδιο ισχύει και για την $1/X$. Ορίζουμε λοιπόν την τ.μ.:

$$Y = g(X) = \frac{1}{X}$$

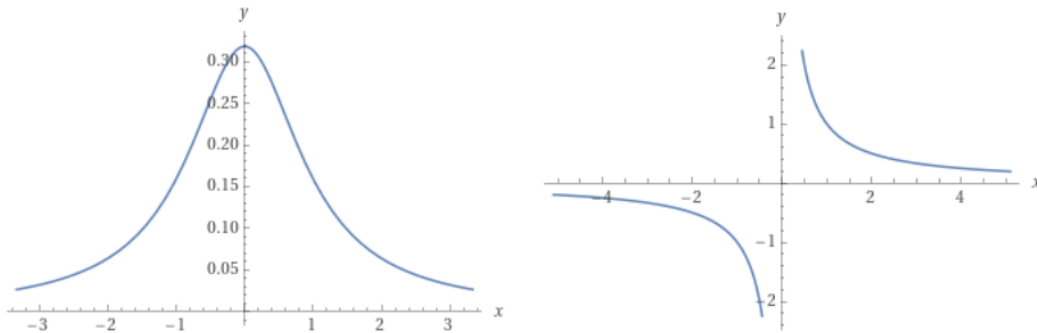
(α) Δώστε τις γραφικές παραστάσεις της σ.π.π. $f_X(x)$ καθώς και του μετασχηματισμού $Y = 1/X$

(β) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_Y(y)$ της τ.μ. Y ως συνάρτηση της α.σ.κ. της τ.μ. X . **Βοήθεια:** Υπολογίστε την $F_Y(y)$ πρώτα για $y \geq 0$ και μετά για $y < 0$

(γ) Υπολογίστε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_Y(y)$ και δείξτε ότι έχει την ίδια ακριβώς έκφραση με την σ.π.π. της X

Λύση:

(α)



Σχήμα 8: Η σ.π.π. της X (αριστερά) και ο μετασχηματισμός $Y = \frac{1}{X}$ (δεξιά)

(β) Έχουμε:

- Για $y \geq 0$: $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq 0) + P(X \geq \frac{1}{y}) = \frac{1}{2} + 1 - F_X(\frac{1}{y}) = \frac{3}{2} - F_X(\frac{1}{y})$
- Για $y < 0$: $F_Y(y) = P(\frac{1}{y} \leq X \leq 0) = F_X(0) - F_X(\frac{1}{y}) = \frac{1}{2} - F_X(\frac{1}{y})$

Σημείωση: $F_X(0) = \frac{1}{2}$, αφού η σ.π.π. της X είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y/y

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} - F_X(\frac{1}{y}), & y < 0 \\ \frac{3}{2} - F_X(\frac{1}{y}), & y \geq 0 \end{cases}$$

(γ) Παραγωγίζουμε ως προς y την α.σ.κ. $F_Y(y)$:

- Για $y \geq 0$:

$$f_Y(y) = \left(\frac{3}{2} - F_X\left(\frac{1}{y}\right) \right)' = 0 - \left(F_X\left(\frac{1}{y}\right) \right)' = - \left(-\frac{1}{y^2} \right) \cdot f_X\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y^2} \cdot \frac{1}{\pi \cdot \left(1 + \frac{1}{y^2}\right)} = \frac{1}{\pi \cdot (1 + y^2)}$$

- Για $y < 0$:

$$f_Y(y) = \left(\frac{1}{2} - F_X\left(\frac{1}{y}\right) \right)' = 0 - \left(F_X\left(\frac{1}{y}\right) \right)' = - \left(-\frac{1}{y^2} \right) \cdot f_X\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y^2} \cdot \frac{1}{\pi \cdot \left(1 + \frac{1}{y^2}\right)} = \frac{1}{\pi \cdot (1 + y^2)}$$

Άρα: $f_Y(y) = \frac{1}{\pi \cdot (1 + y^2)} \Rightarrow \mathbf{Y:Cauchy !}$

Άσκηση 5.

Έστω δύο Γκαουσιανές τ.μ. X και Y με τις εξής παραμέτρους:

$$E[X] = 1, E[Y] = 3 \\ \text{var}(X) = 4, \text{var}(Y) = 1, \rho(X, Y) = 0.2$$

(α) Βρείτε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. $Z = 2X + 3Y - 1$.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Z^2 - 2Z \leq 0)$ εκφράζοντας την απάντησή σας βάσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής.

(γ) Έστω $W = X + aY$. Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς a ώστε οι τ.μ. W και X να είναι ασυσχέτιστες

Λύση:

(α) Είναι:

$$E[Z] = 2E[X] + 3E[Y] - 1 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 - 1 = 10$$

$$\begin{aligned} \text{var}(Z) &= \text{var}(2X + 3Y - 1) = \text{var}(2X + 3Y) = \\ &= \text{var}(2X) + \text{var}(3Y) + 2 \cdot \text{cov}(2X, 3Y) = \\ &= 2^2 \text{var}(X) + 3^2 \text{var}(Y) + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \text{cov}(X, Y) = \\ &= 4\text{var}(X) + 9\text{var}(Y) + 12 \cdot \rho_{X,Y} \cdot \sqrt{\text{var}(X)} \cdot \sqrt{\text{var}(Y)} = \\ &= 4 \cdot 4 + 9 \cdot 1 + 12 \cdot 0.2 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{1} = 25 + 4.8 = 29.8 \end{aligned}$$

(β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} P(Z^2 - 2Z \leq 0) &= P(Z(Z - 2) \leq 0) = P(0 \leq Z \leq 2) = \\ &= P\left(\frac{0 - E[Z]}{\sqrt{\text{var}(Z)}} \leq \frac{Z - E[Z]}{\sqrt{\text{var}(Z)}} \leq \frac{2 - E[Z]}{\sqrt{\text{var}(Z)}}\right) = P\left(\frac{0 - 10}{\sqrt{29.8}} \leq \frac{Z - E[Z]}{\sqrt{\text{var}(Z)}} \leq \frac{2 - 10}{\sqrt{29.8}}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{2 - 10}{\sqrt{29.8}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 10}{\sqrt{29.8}}\right) = \Phi\left(-\frac{8}{5.459}\right) - \Phi\left(-\frac{10}{5.459}\right) = \\ &= \Phi(-1.4655) - \Phi(1.8319) = \Phi(1.8319) - \Phi(1.4655) \end{aligned}$$

(γ) Οι τ.μ. W και X είναι ασυσχέτιστες όταν $\text{cov}(W, X) = 0 \Rightarrow E[WX] = E[W] \cdot E[X]$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} E[WX] &= E[(X + aY)X] = E[X^2] + aE[XY] = \\ &= \text{var}(X) + E[X]^2 + a(\text{cov}(X, Y) + E[X] \cdot E[Y]) = \\ &= 4 + 1^2 + a(0.2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3) = 5 + 3.4a \end{aligned}$$

$$E[W] \cdot E[X] = (E[X] + a \cdot E[Y])E[X] = (1 + 3a)1 = 1 + 3a$$

Οπότε:

$$5 + 3.4a = 1 + 3a \Rightarrow 0.4a = -4 \Rightarrow a = -10$$

Άσκηση 6.

Θεωρήστε 4 τ.μ. W, X, Y, Z , για τις οποίες ισχύουν:

$$E[W] = E[X] = E[Y] = E[Z] = 0$$

$$\text{var}(W) = \text{var}(X) = \text{var}(Y) = \text{var}(Z) = 1.$$

Επιπλέον, υποθέστε ότι οι W, X, Y, Z είναι ασυσχέτιστες ανά ζεύγη. Να υπολογιστούν οι συντελεστές συσχέτισης $\rho(A, B)$ και $\rho(A, C)$, όπου:

$$A = Y + X, B = W + Y, C = X + Z.$$

Λύση:

Εφόσον οι W, X, Y, Z είναι ασυσχέτιστες ανά ζεύγη, έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{cov}(W, X) &= 0 \Rightarrow E[WX] - E[W]E[X] = 0 \Rightarrow E[WX] = E[W]E[X]. \\ \text{cov}(W, Y) &= 0 \Rightarrow E[WY] - E[W]E[Y] = 0 \Rightarrow E[WY] = E[W]E[Y]. \\ \text{cov}(W, Z) &= 0 \Rightarrow E[WZ] - E[W]E[Z] = 0 \Rightarrow E[WZ] = E[W]E[Z]. \\ \text{cov}(X, Y) &= 0 \Rightarrow E[XY] - E[X]E[Y] = 0 \Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y]. \\ \text{cov}(X, Z) &= 0 \Rightarrow E[XZ] - E[X]E[Z] = 0 \Rightarrow E[XZ] = E[X]E[Z]. \\ \text{cov}(Y, Z) &= 0 \Rightarrow E[YZ] - E[Y]E[Z] = 0 \Rightarrow E[YZ] = E[Y]E[Z]. \end{aligned}$$

Με βάση τον ορισμό του συντελεστή συσχέτισης των A και B , έχουμε:

$$\rho(A, B) = \frac{\text{cov}(A, B)}{\sqrt{\text{var}(A)\text{var}(B)}}.$$

Για τον υπολογισμό της συνδιασποράς των A και B , έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{cov}(A, B) &= E[AB] - E[A]E[B] = E[(Y + X)(W + Y)] - E[Y + X]E[W + Y] \\ &= E[YW + Y^2 + XW + XY] - (E[Y] + E[X])(E[W] + E[Y]) = \\ &= E[YW] + E[Y^2] + E[XW] + E[XY] - (0 + 0)(0 + 0) \\ &= E[Y]E[W] + E[Y^2] + E[XW] + E[XY] = \\ &= 0 \times 0 + E[Y^2] + 0 \times 0 + 0 \times 0 = \\ &= E[Y^2] = \text{var}[Y] + (E[Y])^2 = 1 + 0^2 = 1. \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό της διασποράς των A και B , έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{var}(A) &= \text{var}(Y + X) = \text{var}(Y) - 2\text{cov}(Y, X) + \text{var}(X) = 1 - 2 \times 0 + 1 = 2. \\ \text{var}(B) &= \text{var}(W + Y) = \text{var}(W) - 2\text{cov}(W, Y) + \text{var}(Y) = 1 - 2 \times 0 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, ο συντελεστής συσχέτισης των A και B θα είναι τελικά:

$$\rho(A, B) = \frac{\text{cov}(A, B)}{\sqrt{\text{var}(A)\text{var}(B)}} = \frac{1}{\sqrt{2 \times 2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}.$$

Ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό, με βάση τον ορισμό του συντελεστή συσχέτισης των A και C , έχουμε:

$$\rho(A, C) = \frac{\text{cov}(A, C)}{\sqrt{\text{var}(A)\text{var}(C)}}.$$

Για τον υπολογισμό της συνδιασποράς των A και C , έχουμε:

$$\begin{aligned}\text{cov}(A, C) &= E[AC] - E[A]E[C] = E[(Y + X)(X + Z)] - E[Y + X]E[X + Z] = \\ &= E[YX + YZ + X^2 + XZ] - (E[Y] + E[X])(E[X] + E[Z]) = \\ &= E[YX] + E[YZ] + E[X^2] + E[XZ] - (0 + 0)(0 + 0) = \\ &= E[Y]E[X] + E[Y]E[Z] + E[X^2] + E[X]E[Z] = \\ &= 0 \times 0 + 0 \times 0 + E[X^2] + 0 \times 0 = \\ &= E[X^2] = \text{var}(X) + (E[X])^2 = 1 + 0^2 = 1.\end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό της διασποράς των A και C , έχουμε:

$$\begin{aligned}\text{var}(A) &= \text{var}(Y + X) = \text{var}(Y) - 2\text{cov}(Y, X) + \text{var}(X) = 1 - 2 \times 0 + 1 = 2. \\ \text{var}(C) &= \text{var}(X + Z) = \text{var}(X) - 2\text{cov}(X, Z) + \text{var}(Z) = 1 - 2 \times 0 + 1 = 2.\end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, ο συντελεστής συσχέτισης των A και C θα είναι τελικά:

$$\rho(A, C) = \frac{\text{cov}(A, C)}{\sqrt{\text{var}(A)\text{var}(C)}} = \frac{1}{\sqrt{2 \times 2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}.$$