

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Έκτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 15/12/2023

Ημερομηνία Παράδοσης: 05/01/2024

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, εδώ. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και, στη συνέχεια, να φτιάξετε **ένα PDF** που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θο-λές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε **μηδενισμό** των ασκήσεών σας.

Θέματα: Από Κοινού ΣΠΠ Πολλαπλών ΤΜ, Υπολογισμός ΣΠΠ της $Y = g(X)$, Συνδιασπορά και Συσχέτιση.

Άσκηση 1.

Δυο συνεχείς τ.μ X και Y έχουν την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π):

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} c, & y \geq 0, |x| + y \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- (α) Να γίνει η γραφική παράσταση της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας.
- (β) Να υπολογισθεί η σταθερά c .
- (γ) Να υπολογιστούν οι περιθώριες σ.π.π., $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ των τυχαίων μεταβλητών X και Y , καθώς και να δώσετε τις γραφικές τους παραστάσεις. Είναι οι τ.μ X και Y ανεξάρτητες;
- (δ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(X \geq 2Y)$.
- (ε) Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(X + Y \geq 1/2)$.

Άσκηση 2.

Σε ένα μαγικό βασίλειο, οι μάγοι Άλεξ και Βάλор ανταγωνίζονται για να αποδείξουν ποιος είναι ο ισχυρότερος. Ο χρόνος σε λεπτά, που μπορούν να διατηρήσουν τα μαγικά τους ξόρκια, δίνεται από τις τυχαίες μεταβλητές X και Y . Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{X,Y}(x, y)$ δίνεται από τον τύπο:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c(x - y)^2, & 0 \leq x, y < 10 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

όπου $c \in \mathbb{R}$ είναι μια σταθερά.

(α) Να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς c .

(β) Να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$.

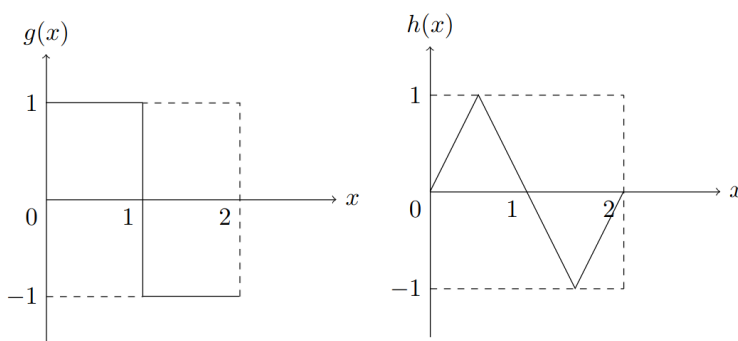
(γ) Να βρεθεί η από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F_{X,Y}(x, y)$.

(δ) Ποια είναι η πιθανότητα κανένας από τους δύο μάγους να διατηρήσει τα ξόρκια του για περισσότερο από δύο λεπτά;

(ε) Ποια είναι η πιθανότητα τουλάχιστον ένας από τους δύο μάγους να διατηρήσει τα ξόρκια του για περισσότερο από πέντε λεπτά;

Άσκηση 3.

Έστω X συνεχής τ.μ. ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα τιμών $[0, 2]$.



Σχήμα 1: Ο τετραγωνικός παλμός (αριστερά) και ο τριγωνικός παλμός (δεξιά)

(α) Ορίζουμε την τ.μ. $Y = g(X)$, όπου η συνάρτηση $g(X)$ είναι ο λεγόμενος 'τετραγωνικός παλμός' που φαίνεται στο Σχήμα 1. Είναι η τ.μ. Y διακριτή ή συνεχής; Να υπολογίσετε και να δώσετε τη γραφική παράσταση της κατανομής της.

(β) Ορίζουμε την τ.μ. $Z = h(X)$, όπου η συνάρτηση $h(X)$ είναι ο λεγόμενος 'τριγωνικός παλμός' που φαίνεται στο Σχήμα 1. Είναι η τ.μ. Z διακριτή ή συνεχής; Να υπολογίσετε και να δώσετε τη γραφική παράσταση της κατανομής της. **Βοήθεια:** Υπολογίστε πρώτα την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_Z(z)$, της Z .

(γ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(Y > 0 | Z > 0)$.

Άσκηση 4.

Μία τυπική τυχαία μεταβλητή Cauchy έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad -\infty \leq x \leq \infty$$

Θα δείξουμε ότι αν η X είναι μία τυπική τ.μ. Cauchy, τότε το ίδιο ισχύει και για την $1/X$. Ορίζουμε λοιπόν την τ.μ.:

$$Y = g(X) = \frac{1}{X}$$

(α) Δώστε τις γραφικές παραστάσεις της σ.π.π. $f_X(x)$ καθώς και του μετασχηματισμού $Y = 1/X$

(β) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_Y(y)$ της τ.μ. Y ως συνάρτηση της α.σ.κ. της τ.μ. X . **Βοήθεια:** Υπολογίστε την $F_Y(y)$ πρώτα για $y \geq 0$ και μετά για $y < 0$

(γ) Υπολογίστε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_Y(y)$ και δείξτε ότι έχει την ίδια ακριβώς έκφραση με την σ.π.π. της X

Άσκηση 5.

Έστω δύο Γκαουσιανές τ.μ. X και Y με τις εξής παραμέτρους:

$$E[X] = 1, E[Y] = 3 \\ \text{var}(X) = 4, \text{var}(Y) = 1, \rho(X, Y) = 0.2$$

(α) Βρείτε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. $Z = 2X + 3Y - 1$.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Z^2 - 2Z \leq 0)$ εκφράζοντας την απάντησή σας βάσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής.

(γ) Έστω $W = X + aY$. Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς a ώστε οι τ.μ. W και X να είναι ασυσχέτιστες

Άσκηση 6.

Θεωρήστε 4 τ.μ. W, X, Y, Z , για τις οποίες ισχύουν:

$$E[W] = E[X] = E[Y] = E[Z] = 0 \\ \text{var}(W) = \text{var}(X) = \text{var}(Y) = \text{var}(Z) = 1.$$

Επιπλέον, υποθέστε ότι οι W, X, Y, Z είναι ασυσχέτιστες ανά ζεύγη. Να υπολογιστούν οι συντελεστές συσχέτισης $\rho(A, B)$ και $\rho(A, C)$, όπου:

$$A = Y + X, B = W + Y, C = X + Z.$$