

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πέμπτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1

(α)

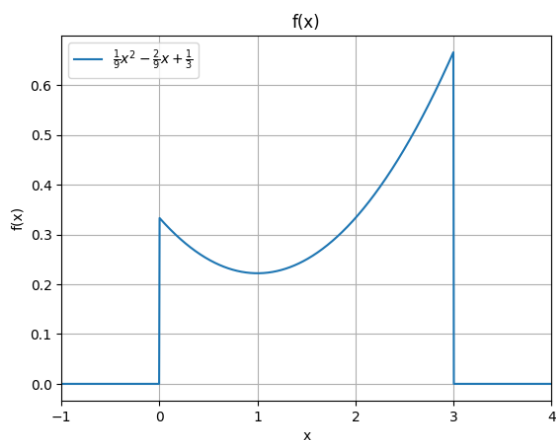
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx &= \int_0^3 f_X(x) dx \\ &= \int_0^3 \left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{9}cx + \frac{1}{3} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{27}x^3 - \frac{2}{9}cx^2 + \frac{1}{3}x \right]_0^3 \\ &= \frac{1}{27}27 - \frac{2}{9}c \cdot 9 + \frac{1}{3}3 \\ &= 1 - \frac{2}{3}c + 1 \\ &= 2 - \frac{2}{3}c\end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι πρέπει

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx &= 1 \Leftrightarrow \\ 2 - \frac{2}{3}c &= 1 \Leftrightarrow \\ \frac{2}{3}c &= 1 \Leftrightarrow \\ c &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Άρα για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας έχουμε

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}, & 0 < x < 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



(β)

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \\
&= \int_0^3 x \left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{3} \right) dx \\
&= \int_0^3 \frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{9}x^2 + \frac{1}{3}x dx \\
&= \left[\frac{1}{36}x^4 - \frac{2}{27}x^3 + \frac{1}{6}x^2 \right]_0^3 \\
&= \frac{81}{36} - 2 + \frac{9}{6} \\
&= \frac{9}{4} - 2 + \frac{9}{6} \\
&= \frac{54}{24} - \frac{48}{24} + \frac{36}{24} \\
&= \frac{30}{24} \\
&= \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx \\
&= \int_0^3 x^2 \left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{3} \right) dx \\
&= \int_0^3 \frac{1}{9}x^4 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^2 dx \\
&= \left[\frac{1}{45}x^5 - \frac{2}{36}x^4 + \frac{1}{9}x^3 \right]_0^3 \\
&= \frac{1}{45}243 - \frac{2}{36}81 + \frac{1}{9}27 \\
&= \frac{27}{5} - \frac{18}{4} + 3 \\
&= \frac{108}{20} - \frac{90}{20} + \frac{60}{20} \\
&= \frac{78}{20} = \frac{39}{10}
\end{aligned}$$

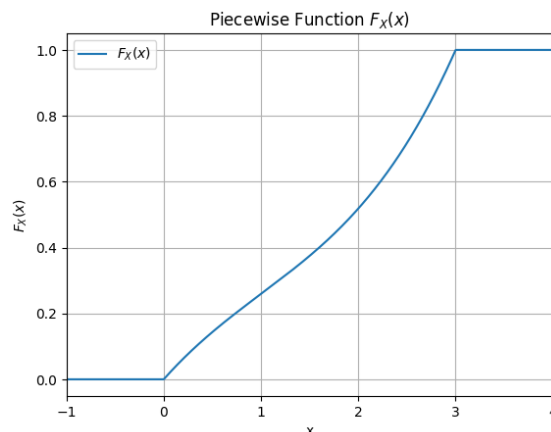
$$\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{39}{10} - \frac{25}{36} = \frac{702}{180} - \frac{125}{180} = \frac{577}{180}$$

(γ) Για $x \leq 0$, $F_X(x) = 0$, για $x \geq 3$, $F_X(x) = 1$, ενώ για $x \in (0, 3)$

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_0^x f(t) dt \\
&= \int_0^x \frac{1}{9}t^2 - \frac{2}{9}t + \frac{1}{3} dt \\
&= \left[\frac{1}{27}t^3 - \frac{1}{9}t^2 + \frac{1}{3}t \right]_0^x \\
&= \frac{1}{27}x^3 - \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}x.
\end{aligned}$$

Άρα:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{27}x^3 - \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}x, & 0 < x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$



(δ) Εφόσον η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή στο $[0, 3]$, η πιθανότητα να λάβει την τιμή ενός σημείου είναι μηδέν. Άρα $P(X = 2) = 0$.

(ε) Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(0 < X < 1.5)$, $P(1 < X < 2)$, $P(X > 2)$.

$$\begin{aligned} P(0 < X < 1.5) &= \int_0^{1.5} f_X(x) dx \\ &= \int_0^{1.5} \left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{3} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{27}x^3 - \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}x \right]_0^{1.5} \\ &= \frac{1}{27}(1.5)^3 - \frac{1}{9}(1.5)^2 + \frac{1}{3}1.5 \\ &= \frac{1}{27} \frac{27}{8} - \frac{1}{9} \frac{9}{4} + \frac{1}{3} \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα μπορούσαμε να φτάσουμε χρησιμοποιώντας την υπολογισμένη ΑΣΚ από το προηγούμενο ερώτημα:

$$\begin{aligned} P(0 < X < 1.5) &= F_X(1.5) - F_X(0) \\ &= \frac{1}{27}(1.5)^3 - \frac{1}{9}(1.5)^2 + \frac{1}{3}1.5 - 0 \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(1 < X < 2) &= \int_1^2 f_X(x) dx \\
 &= \int_1^2 \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{3} dx \\
 &= \left[\frac{1}{27}x^3 - \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}x \right]_1^2 \\
 &= \frac{1}{27}8 - \frac{1}{9}4 + \frac{1}{3}2 - \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} \\
 &= \frac{7}{27} - \frac{3}{9} + \frac{1}{3} = \frac{7}{27}
 \end{aligned}$$

Ομοίως, χρησιμοποιώντας την ΑΣΚ:

$$\begin{aligned}
 P(1 < X < 2) &= F_X(2) - F_X(1) \\
 &= \frac{8}{27} - \frac{4}{9} + \frac{2}{3} - \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} \\
 &= \frac{7}{27}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(X > 2) &= \int_2^{\infty} f_X(x) dx \\
 &= \int_2^3 \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{3} dx + 0 \\
 &= \left[\frac{1}{27}x^3 - \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}x \right]_2^3 \\
 &= \frac{1}{27}27 - \frac{1}{9}9 + \frac{1}{3}3 - \frac{1}{27}8 + \frac{1}{9}4 - \frac{1}{3}2 \\
 &= 1 - \frac{8}{27} + \frac{12}{27} - \frac{18}{27} \\
 &= \frac{13}{27}
 \end{aligned}$$

Ομοίως, χρησιμοποιώντας την ΑΣΚ:

$$\begin{aligned}
 P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - F_X(2) \\
 &= 1 - \frac{8}{27} + \frac{4}{9} - \frac{2}{3} \\
 &= \frac{13}{27}
 \end{aligned}$$

Άσκηση 2

Για να είναι η $f_X(x)$ μια έγκυρη Σ.Π.Π. πρέπει να ισχύει $f_X(x) \geq 0$ και $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$.

- $f_X(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, αφού $\lambda > 0$ και $e^u > 0 \forall u \in \mathbb{R}$.

-

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{\lambda}{2} e^{+\lambda x} dx + \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{\lambda x} \right]_{-\infty}^0 + \left[-\frac{1}{2} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\lambda x} - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\lambda x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{\lambda}{2} x e^{+\lambda x} dx + \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{2} x e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x e^{\lambda x} \right]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} e^{\lambda x} dx + \left[-\frac{1}{2} x e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{2} e^{-\lambda x} dx \\ &= 0 - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-\lambda x}} - \left[\frac{1}{2\lambda} e^{\lambda x} \right]_{-\infty}^0 - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{\lambda x}} + 0 - \left[\frac{1}{2\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\lambda e^{-\lambda x}} - \frac{1}{2\lambda} + 0 - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda x}} - 0 + \frac{1}{2\lambda} \\ &= 0 - \frac{1}{2\lambda} - 0 + \frac{1}{2\lambda} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{\lambda}{2} x^2 e^{+\lambda x} dx + \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{2} x^2 e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 e^{\lambda x} \right]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} 2x e^{\lambda x} dx + \left[-\frac{1}{2} x^2 e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{2} 2x e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 e^{\lambda x} \right]_{-\infty}^0 + \left[-\frac{1}{2} x^2 e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} - \int_{-\infty}^0 x e^{\lambda x} dx + \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-\lambda x}} - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{\lambda x}} - \left[\frac{x}{\lambda} e^{\lambda x} \right]_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} dx + \left[-\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} dx \\ &= 0 - 0 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\lambda e^{-\lambda x}} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\lambda e^{\lambda x}} + 0 + \left[\frac{1}{\lambda^2} e^{\lambda x} \right]_{-\infty}^0 + \left[-\frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} \\ &= 0 + \frac{1}{\lambda^2} - 0 - 0 + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[x])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - 0 = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Άσκηση 3

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{1 + e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}} \\ = \frac{\frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}}{(1 + e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}})^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} F_X(x)(1 - F_X(x)) &= \frac{1}{\sigma} \frac{1}{1 + e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}} \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma} \frac{1}{1 + e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}} - \frac{1}{\sigma} \frac{1}{(1 + e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}})^2} \\ &= \frac{1}{\sigma} \frac{1 + e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}}{(1 + e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}})^2} - \frac{1}{\sigma} \frac{1}{(1 + e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}})^2} \\ &= \frac{1}{\sigma} \frac{1 + e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}} - 1}{(1 + e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}})^2} \\ &= \frac{\frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}}{(1 + e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}})^2} \\ &= f_X(x) \end{aligned}$$

Άρα

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma} F_X(x)(1 - F_X(x))$$

Άσκηση 4

$$(\alpha) \quad - \quad f_X(x) \geq 0, \quad \forall x$$

-

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} dx \\ &= \left[-e^{-\frac{1}{2}x} \right]_0^{\infty} \\ &= 0 + e^0 = 1 \end{aligned}$$

Για την πιθανότητα μια διαφήμιση να ξεπεράσει τα 2 λεπτά, υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= \int_2^{\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} dx \\ &= \left[-e^{-\frac{1}{2}x} \right]_2^{\infty} \\ &= 0 + e^{-1} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

(β) Έστω Y ο αριθμός των διαφημίσεων που ξεπερνούν τα 2 λεπτά. Η τυχαία μεταβλητή ακολουθεί διωνυμική κατανομή, $Y \sim \Delta(4, P(X > 2))$. Άρα

$$P(Y = 1) = \binom{4}{1} P(X > 2)^1 (1 - P(X > 2))^3 = 4e^{-1}(1 - e^{-1})^3 \cong 0.375$$

Άσκηση 5

•

$$P(X \leq 0) = P\left(\frac{X-2}{3} \leq \frac{0-2}{3}\right) = \Phi\left(-\frac{2}{3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2}{3}\right)$$

•

$$\begin{aligned} P(X^2 \geq 150) &= P(X \geq 5\sqrt{6} \cup X \leq -5\sqrt{6}) = P(X \geq 5\sqrt{6}) + P(X \leq -5\sqrt{6}) \\ &= 1 - P(X \leq 5\sqrt{6}) + P(X \leq -5\sqrt{6}) \\ &= 1 - P\left(\frac{X-2}{3} \leq \frac{5\sqrt{6}-2}{3}\right) + P\left(\frac{X-2}{3} \leq \frac{-5\sqrt{6}-2}{3}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{5\sqrt{6}-2}{3}\right) + \Phi\left(\frac{-5\sqrt{6}-2}{3}\right) \\ &= 2 - \Phi\left(\frac{5\sqrt{6}-2}{3}\right) - \Phi\left(\frac{5\sqrt{6}+2}{3}\right) \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} P(|X| \geq 6) &= P(X \geq 6 \cup X \leq -6) = P(X \geq 6) + P(X \leq -6) \\ &= 1 - P(X \leq 6) + P(X \leq -6) \\ &= 1 - P\left(\frac{X-2}{3} \leq \frac{6-2}{3}\right) + P\left(\frac{X-2}{3} \leq \frac{-6-2}{3}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{4}{3}\right) + \Phi\left(-\frac{8}{3}\right) \\ &= 2 - \Phi\left(\frac{4}{3}\right) - \Phi\left(\frac{8}{3}\right) \end{aligned}$$

- $P(X = 0) = 0$ καθώς η τ.μ. X είναι συνεχής.

Άσκηση 6

- Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P\left(\sum_{i=1}^4 X_i > 10\right)$$

Αλλά

$$\sum_{i=1}^4 X_i \sim \mathcal{N}(4 \cdot 11.5, 4 \cdot 6)$$

, άρα

$$P\left(\sum_{i=1}^4 X_i > 10\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^4 X_i - 46}{\sqrt{24}} > \frac{10 - 46}{\sqrt{24}}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{36}{\sqrt{24}}\right) = \Phi\left(\frac{36}{\sqrt{24}}\right).$$

- Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^4 X_i < 0\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^4 X_i - 46}{\sqrt{24}} < \frac{0 - 46}{\sqrt{24}}\right) \\ &= \Phi\left(-\frac{46}{\sqrt{24}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{46}{\sqrt{24}}\right). \end{aligned}$$

- Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P\left(\sum_{i=1}^4 X_i > 10 \mid X_1 + X_2 = 5\right) = P(5 + X_3 + X_4 > 10) = P(X_3 + X_4 > 5)$$

Όμως $X_3 + X_4 \sim \mathcal{N}(23, 12)$, άρα:

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^4 X_i > 10 \mid X_1 + X_2 = 5\right) &= P\left(\frac{X_3 + X_4 - 23}{\sqrt{12}} > \frac{5 - 23}{\sqrt{12}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(-\frac{18}{\sqrt{12}}\right) = \Phi\left(\frac{9}{\sqrt{3}}\right) = \Phi(3\sqrt{3}) \end{aligned}$$

- Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P\left(\sum_{i=1}^4 X_i > 10 \mid X_1 = 15\right) = P(15 + X_2 + X_3 + X_4 > 10) = P(X_2 + X_3 + X_4 > -5)$$

Όμως $X_2 + X_3 + X_4 \sim \mathcal{N}(34.5, 18)$, άρα:

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^4 X_i > 10 \mid X_1 = 15\right) &= P\left(\frac{X_2 + X_3 + X_4 - 34.5}{\sqrt{18}} > \frac{-5 - 34.5}{\sqrt{18}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(-\frac{39.5}{\sqrt{18}}\right) = \Phi\left(\frac{39.5}{\sqrt{18}}\right) \end{aligned}$$

Άσκηση 7

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

N = 10**4
a = 0
b = 1

# Step 1: Generate 1000 samples from a uniform distribution between a and b.
uniform_samples = np.random.uniform(a, b, N)

# Step 2: Generate 1000 samples from a normal distribution with mean 0 and std 1.
normal_samples = np.random.normal(0, 1, N)

# Step 3: Plot histograms for both sets of samples.
plt.figure(figsize=(12, 4))

plt.subplot(1, 3, 1)
plt.hist(uniform_samples, bins=20, color='blue', alpha=0.7)
plt.title('Uniform Distribution (0 to 1)')

plt.subplot(1, 3, 2)
plt.hist(normal_samples, bins=20, color='green', alpha=0.7)
plt.title('Normal Distribution (mean 0, std 1)')

# Step 4: Add the two sets of samples element-wise.
added_samples = uniform_samples + normal_samples

# Step 5: Plot the histogram of the result.
plt.subplot(1, 3, 3)
plt.hist(added_samples, bins=20, color='red', alpha=0.7)
plt.title('Sum of Distributions')

plt.tight_layout()
plt.show()
```

Παρατηρούμε ότι για το άθροισμα των τ.μ., η μέση τιμή είναι το άθροισμα των μέσων τιμών της ομοιόμορφης και της κανονικής κατανομής, ενώ καθώς αυξάνεται η διαφορά $b - a$, αυξάνεται και η διασπορά του αθροίσματος. Όταν πια η διαφορά $b - a$ είναι πολύ μεγάλη σε σχέση με τη διασπορά της κανονικής κατανομής, η ομοιόμορφη κατανομή μοιάζει να έχει απορροφήσει πλήρως την κανονική.

