

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες-Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 1/12/2023

Ημερομηνία Παράδοσης: 15/12/2023

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, εδώ. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και, στη συνέχεια, να φτιάξετε **ένα PDF** που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θο-λές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε **μηδενισμό** των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1 Η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την ακόλουθη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (Σ.Π.Π.):

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2 - 3cx + \frac{1}{3}, & 0 < x < 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}.$$

- (α) Υπολογίστε την τιμή του c και σχεδιάστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$.
- (β) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X .
- (γ) Υπολογίστε και σχεδιάστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (Α.Σ.Κ.) $F_X(x)$.
- (δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X = 2)$.
- (ε) Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(0 < X < 1.5)$, $P(1 < X < 2)$, $P(X > 2)$.

Άσκηση 2 Η Τ.Μ X ακολουθεί κατανομή Laplace:

$$f_X(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}, \quad \lambda > 0$$

Επαληθεύστε ότι η $f_X(x)$ είναι μια έγκυρη Σ.Π.Π. και υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της Τ.Μ. X .

Άσκηση 3 Η λογιστική κατανομή που χρησιμοποιείται σε μοντέλα αύξησης πληθυσμών έχει παραμέτρους $\mu, \sigma > 0$ και συνάρτηση κατανομής

$$F_X(x) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}}.$$

Δείξτε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της λογιστικής κατανομής ικανοποιεί την σχέση:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma} F_X(x)(1 - F_X(x))$$

Άσκηση 4 Η διάρκεια μιας διαφήμισης στην αρχή ενός βίντεο σε λεπτά, ακολουθεί την

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}, & x > 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}.$$

- (α) Επαληθεύστε ότι η $f_X(x)$ είναι μια έγκυρη Σ.Π.Π. και υπολογίστε την πιθανότητα μια διαφήμιση να ξεπεράσει τα 2 λεπτά;
- (β) Ποια η πιθανότητα σε 4 διαφημίσεις μόνο μια ξεπεράσει τα 2 λεπτά;

Άσκηση 5 Η τ.μ. X ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 2$ και διασπορά $\sigma^2 = 9$, $X \sim \mathcal{N}(2, 9)$. Υπολογίστε τις ακόλουθες πιθανότητες εκφράζοντας την απάντησή σας βάσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(x)$.

- $P(X \leq 0)$.
- $P(X^2 \geq 150)$.
- $P(|X| \geq 6)$.
- $P(X = 0)$.

Άσκηση 6 Μετά την εξαγορά του Twitter από τον Elon Musk, παρατηρήθηκε περίοδος μεγάλης αστάθειας ως προς τη δομή της εταιρίας. Ένα στατιστικό μοντέλο που αναπτύχθηκε, προβλέπει ότι σε διάστημα ενός 3μήνου ο αριθμός των υπαλλήλων που απολύει ο Elon μείον τον αριθμό των νέων υπαλλήλων που προσλαμβάνει είναι μια κανονική τ.μ. με μέση τιμή 11.5 και διασπορά 6. Αν θεωρήσουμε ότι οι διαφορές απολύσεων - προσλήψεων ανά τρίμηνο είναι ανεξάρτητες τ.μ.

- Ποια η πιθανότητα σε διάστημα ενός έτους (4 τριμήνων) η διαφορά απολύσεων - προσλήψεων να είναι πάνω από 10;
- Ποια η πιθανότητα σε διάστημα ενός έτους η διαφορά απολύσεων - προσλήψεων να είναι μικρότερη του 0;
- Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα σε διάστημα ενός έτους η διαφορά απολύσεων - προσλήψεων να είναι πάνω από 10, δεδομένου ότι στο πρώτο 6μηνο η διαφορά είναι 5;
- Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα σε διάστημα ενός έτους η διαφορά απολύσεων - προσλήψεων να είναι πάνω από 10, δεδομένου ότι στο πρώτο 3μηνο η διαφορά είναι 15;

Να εκφράσετε τα παραπάνω συναρτήσει της ΑΣΚ της τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(x)$.

Άσκηση 7 Δημιουργήστε ένα πρόγραμμα σε Matlab ή Python στο οποίο θα υλοποιήσετε τα παρακάτω:

1. Δημιουργήστε 10^4 δείγματα από μια ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[a, b]$, για $a = 0$, $b = 1$.
2. Δημιουργήστε 10^4 δείγματα από μια κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu = 0$, $\sigma = 1$.
3. Προσθέστε τα δείγματα από την ομοιόμορφη και την κανονική κατανομή.
4. Σχεδιάστε το ιστόγραμμα όλων των παραπάνω δειγμάτων.
5. Μεταβάλλετε τις τιμές των παραμέτρων a και b της ομοιόμορφης κατανομής και επαναλάβετε τα ερωτήματα 3 και 4. Τι παρατηρείτε;

Χρήσιμες συναρτήσεις: Matlab: randi, randn, histogram Python: numpy.random.rand, numpy.random.normal, matplotlib.pyplot.hist