

Άσκηση 1

(a)(i)

Η συνάρτηση αυτή δεν μπορεί να αποτελεί έγκυρη συνάρτηση πιθανότητας διακριτής τ.μ. διότι δεν ισχύει η συνθήκη κανονικοποίησης

$$\sum_x p_X(x) = 1$$

$$\text{αφού } \sum_x p_X(x) = 0.3 + 0.5 + 0.2 + 0.1 = 1.1$$

(a)(ii)

Ούτε αυτή η συνάρτηση δεν αποτελεί έγκυρη PMF διακριτής τ.μ. διότι δεν μπορούμε να έχουμε αρνητική πιθανότητα αλλά έχουμε $P_X(7.9) = -0.11$.

$$(b)(i) \quad P(X = 80) = p_X(80) = 0.4$$

$$(b)(ii) \quad P(X > 80) = P(X = 81) = p_X(81) = 0.1$$

$$(b)(iii) \quad P(X \leq 80) = 1 - P(X > 80) = 1 - 0.1 = 0.9$$

(b)(iv)

$$\bullet \quad E[X] = \sum_x x p_X(x) = 77 \cdot 0.15 + 78 \cdot 0.15 + 79 \cdot 0.2 + 80 \cdot 0.4 + 81 \cdot 0.1 = 79.15$$

$$\bullet \quad \text{var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \sum_x x^2 p_X(x) - E[X]^2 = 6266.25 - (79.15)^2 \approx 1.53$$

$$\bullet \quad \sigma = \sqrt{\text{var}(X)} = \sqrt{1.53} \approx 1.24$$

Άσκηση 2

Έστω X η τ.μ. που εκφράζει το πλήθος των πόντων που κερδίζει ο Βασίλης, δηλαδή το πλήθος των φορών που φαίρνει 4 βάρες. Η X ακολουθεί Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n = 1000$ και $p = (\frac{1}{6})^4 = \frac{1}{1296}$, αφού τα ζάρια είναι δίκαια και οι ρίψεις των ζαριών ανεξάρτητες μεταξύ τους. Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(X = 2) = \binom{1000}{2} \left(\frac{1}{1296}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{1296}\right)^{998} \approx 0.1376$$

Εναλλακτικά, παρατηρούμε ότι το n είναι αρκετά μεγάλο και το P αρκετά μικρό. Άρα μπορούμε να προσεγγίσουμε την κατανομή με την κατανομή Poisson και παράμετρο $\lambda = np = 1000 \cdot \frac{1}{1296} = 0.7716$

$$P(X = 2) = e^{-0.7716} \frac{(0.7716)^2}{2!} \approx 0.1376$$

Άσκηση 3

$$(\alpha) P(X \leq 2, Y \leq 4) = p_{XY}(1, 2) + p_{XY}(1, 4) + p_{XY}(2, 2) + p_{XY}(2, 4) = \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned}(\beta) \quad \sum_y p_{XY}(1, y) &= \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{6} \\ \sum_y p_{XY}(2, y) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \\ \sum_y p_{XY}(3, y) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{11}{24}\end{aligned}$$

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{για } x = 1 \\ \frac{3}{8} & \text{για } x = 2 \\ \frac{11}{24} & \text{για } x = 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\sum_x p_{XY}(x, 2) &= \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ \sum_x p_{XY}(x, 4) &= \frac{1}{24} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\sum_x p_{XY}(x, 5) = \frac{1}{24} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{για } y = 2 \\ \frac{1}{4} & \text{για } y = 4 \\ \frac{1}{4} & \text{για } y = 5 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

(γ)

$$P(X = 2|Y = 1) = \frac{P(X = 1 \cap Y = 2)}{P(X = 1)} = \frac{p_{XY}(1, 2)}{p_X(1)} = \frac{1}{2}$$

(δ)

Για να είναι οι X και Y ανεξάρτητες πρέπει να ισχύει η συνθήκη ανεξαρτησίας, $P(X \cap Y) = P(X)P(Y)$, για κάθε x, y στον δειγματικό χώρο των p_X και p_Y .

Ισχύει $P(X = 2, Y = 2) = \frac{1}{6} \neq P(X = 2)P(Y = 2) = \frac{3}{16}$.

Επομένως οι X και Y δεν είναι ανεξάρτητες.

Άσκηση 4

Εκτελούμε $50(n)$ ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $p = 0.05$. Θεωρούμε, δηλαδή, επιτυχία το γεγονός ότι το άτομο διαθέτει το συγκεκριμένο γονίδιο. Για να υπολογίσουμε τη μέση τιμή χρησιμοποιούμε το γνωστό τύπο της διωνυμικής, $E[X] = n \cdot p = 50 \cdot 0.05 = 2.5$.

Επίσης, ζητάμε την πιθανότητα, το πλήθος των επιτυχιών να είναι το πολύ ίσο με 2, με τη χρήση της προσέγγισης "Poisson". Ισχύει $\lambda = 50 \cdot (0.05) = 2.5$ και:

$$p = \sum_{k=0}^2 \frac{e^{-2.5}(2.5)^k}{k!} = e^{-2.5} \left(1 + 2.5 + \frac{6.25}{2} \right) = 6.625 \cdot e^{-2.5}$$

Άσκηση 5

(α) Η τ.μ. X μετρά το πλήθος των επιτυχιών σε 20 ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli επομένως ακολουθεί Δυωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n=20$ και $p = \frac{1}{6}$ (εφόσον το ζάρι είναι δίκαιο). Η συνάρτηση πιθανότητας της X είναι:

$$p_X(k) = \binom{20}{k} \frac{1}{6}^k \frac{5}{6}^{20-k}, k = 0, 1, \dots, 20$$

Η μέση τιμή της X είναι:

$$E[X] = np = 20 \frac{1}{6} = \frac{10}{3}$$

Η διασπορά της X είναι:

$$\text{var}(X) = np(1-p) = 20 \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{10}{3} \frac{5}{6} = \frac{25}{12}$$

Επομένως,

$$E[X^2] = \text{var}(X) + (E[X])^2 = \frac{25}{12} + \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{25}{12} + \frac{100}{9} = 13.19$$

(β) Αν παίζουμε το παιχνίδι 20 φορές, θα φέρουμε "6" X φορές και κάτι διαφορετικό του "6", $20-X$ φορές. Άρα το συνολικό μας κέρδος είναι

$$Z = 8X - 1 \cdot (20 - X) = 9X - 20$$

Το αναμενόμενο κέρδος μας, ισούται με την μέση τιμή του συνολικού κέρδους, Z .

$$E[Z] = 9E[X] - 20 = 9 \frac{10}{3} - 20 = 30 - 20 = 10$$

(γ) Η Y ακολουθεί Γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p = \frac{1}{6}$. Η συνάρτηση πιθανότητας της Y είναι

$$p_Y(k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}, k = 1, 2, \dots$$

Η μέση τιμή της Y είναι

$$E[Y] = \frac{1}{p} = 6$$

(δ) Έστω W το πλήθος των παιχνιδιών μέχρις ότου φέρουμε "6" για 3η φορά. Η W ακολουθεί κατανομή Pascal τάξης $r = 3$ με παράμετρο $p = \frac{1}{6}$

$$E[W] = \frac{r}{p} = \frac{3}{\frac{1}{6}} = 24$$

Σε αυτήν την περίπτωση το κέρδος είναι

$$Z = 3 \cdot 8 - 1 \cdot (W - 3) = 27 - W$$

και το αναμενόμενο κέρδος είναι

$$E[Z] = 27 - E[W] = 27 - 24 = 3$$

Άσκηση 6

(α) Όταν ο εξερευνητής δεν μαρκάρει τα μέρη στα οποία έχει ψάξει, δηλαδή επιλέγει με επανάθεση, έχουμε μία ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $p = \frac{1}{n}$ και αποτυχίας $1 - p = 1 - \frac{1}{n}$. Ορίζουμε την τ.μ. X , ως το πλήθος των προσπαθειών μέχρι την πρώτη επιτυχία, δηλαδή μέχρι να βρει το θησαυρό. Η X ακολουθεί Γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p = \frac{1}{n}$.

$$p_x(k) = (1 - p)^{k-1}p = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} \frac{1}{n}; k = 1, 2, 3, \dots$$

$$E[X] = \frac{1}{p} = n$$

(β) Όταν ο εξερευνητής μαρκάρει τα σημεία στον χάρτη που έχει ήδη επισκεφθεί, ώστε να μην τα ξαναεπισκεφθεί, επιλέγει χωρίς επανάθεση. Τώρα η τ.μ. X μπορεί να πάρει τιμές $Q = 1, 2, \dots, n$. Το γεγονός $X = k$, $k = 1, 2, \dots, n$ συμβαίνει όταν το σωστό μέρος επιλεγεί k -οστό από τον εξερευνητή. Σκεφτόμαστε λοιπόν μια διάταξη των σημείων στα οποία θα ψάξει. Υπάρχουν $n!$ τέτοιες διατάξεις (πλήθος μεταθέσεων n αντικειμένων) και ο εξερευνητής επισκέπτεται τα πιθανά μέρη στα οποία βρίσκεται ο θησαυρός με τη σειρά που έχουν διαταχθεί. Ακριβώς $(n-1)!$ από όλες τις $n!$ διατάξεις έχουν το σωστό μέρος, όπου βρίσκεται ο θησαυρός, ως k -οστό στη σειρά (καθώς τα $n-1$ λάθος μέρη καταλαμβάνουν τις $n-1$ άλλες θέσεις με $(n-1)!$ τρόπους). Άρα

$$P(X = k) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \text{ για } k = 1, 2, \dots, n$$

Άρα σε αυτήν την περίπτωση η τ.μ. X ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή με πεδίο τιμών

1, 2, ..., n. Συνεπώς

$$E[X] = \frac{n+1}{2}$$

Βλέπουμε ότι στην περίπτωση που μαρκάρει τα σημεία που έχει επισκεφθεί στον χάρτη μειώνει τον μέσο όρο των προσπαθειών σχεδόν στο μισό.