

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 2-11-2023

Ημερομηνία Παράδοσης: 12-11-2023

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, **εδώ**. Παραδόσεις με e-mail, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα PDF που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκαναρίσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Άσκηση 1

Πόσοι δυνατοί κωδικοί 7 χαρακτήρων μπορούν να δημιουργηθούν εάν:

- α) Χρησιμοποιούμε μόνο κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου και το ίδιο γράμμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί πολλές φορές.
- β) Χρησιμοποιούμε μόνο κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου, όλα διαφορετικά μεταξύ τους.
- γ) Χρησιμοποιούμε μόνο κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου και ψηφία.
- δ) Χρησιμοποιούμε μόνο το γράμμα **Κ** και το ψηφίο **2**.
- ε) Χρησιμοποιήσουμε μόνο τα **Κ** και **2** και τα περιλάβουμε και τα δύο.

Λύση:

- α) Το ελληνικό αλφάβητο έχει 24 γράμματα από τα οποία διαλέγουμε 7, ενδιαφερόμενοι για τη διάταξη και έχοντας τη δυνατότητα να διαλέξουμε ένα γράμμα πάνω από μία φορά. Άρα,

χρησιμοποιώντας μόνο κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου μπορούμε να δημιουργήσουμε 24^7 διαφορετικά passwords 7 χαρακτήρων.

- β) Το ελληνικό αλφάβητο έχει 24 γράμματα από τα οποία διαλέγουμε 7 διαφορετικά μεταξύ τους, ενδιαφερόμενοι για τη διάταξη. Άρα, χρησιμοποιώντας μόνο πεζά γράμματα του λατινικού αλφαβήτου, όλα διαφορετικά μεταξύ τους, μπορούμε να δημιουργήσουμε $P(24, 7) = \frac{24!}{(24-7)!} = \frac{24!}{17!}$ διαφορετικά passwords 7 χαρακτήρων.
- γ) Το ελληνικό αλφάβητο έχει 24 γράμματα και τα ψηφία (0-9) είναι 10. Άρα, για τον κωδικό έχουμε να διαλέξουμε μεταξύ 34 χαρακτήρων και μπορούμε να ξαναχρησιμοποιήσουμε τον ίδιο χαρακτήρα, άρα έχουμε 34^7 πιθανά passwords.
- δ) Το γράμμα Κ και το ψηφίο 2 είναι οι 2 χαρακτήρες που έχουμε στην διάθεση μας (και προφανώς χρησιμοποιούμε πάνω από μία φορά τους χαρακτήρες), άρα έχουμε 2^7 πιθανά passwords
- ε) Όπως βρήκαμε στο υποερώτημα (δ), χρησιμοποιώντας μόνο το γράμμα Κ και το ψηφίο 2, μπορούμε να δημιουργήσουμε 2^7 διαφορετικά passwords 7 χαρακτήρων. Αφού, όμως, σε αυτήν την περίπτωση, πρέπει να τα περιλαμβάνει και τα δύο, τα passwords "KKKKKKK" και "2222222" δεν είναι αποδεκτά. Άρα, χρησιμοποιώντας μόνο το γράμμα Κ και το 2 και περιλαμβάνοντάς τα και τα δύο, μπορούμε να δημιουργήσουμε $2^7 - 2$ διαφορετικά passwords 7 χαρακτήρων.

Άσκηση 2

Παίζετε ένα παιχνίδι poker με άλλους 2 φίλους σας, με μία κανονική τράπουλα 52 καρτών. Μοιράζετε κανονικά 2 κάρτες στον καθένα και απλώνετε άλλες 5 κάρτες μπροστά σας. Κανονικά δεν θα έπρεπε να ξέρετε τα φύλλα των άλλων 2 παικτών, αλλά επειδή είστε πονηροί, τα έχετε δει και ξέρετε ότι κανένας σας δεν έχει Άσσο (A) και Ρήγα (K). Να υπολογίσετε τις παρακάτω πιθανότητες:

- α) Βρίσκονται 2 A στα 5 κρυφά φύλλα.
- β) Βρίσκονται 3 K στα 5 κρυφά φύλλα.
- γ) Βρίσκονται 2 A ή 3 K στα 5 κρυφά φύλλα.

Λύση:

Χρειάζεται αρχικά να γνωρίζουμε όλους τους συνδυασμούς που μπορεί να προκύψουν στα 5 φύλλα που είναι κάτω. Η τράπουλα έχει 52 φύλλα, όμως έχετε μοιράσει 2 φύλλα σε εσάς και άλλα 2 σε κάθε ένα από τους 2 φίλους σας, συνολικά δηλαδή έχουν μοιράσει 6 φύλλα, άρα διαθέσιμα πλέον είναι $52 - 6 = 46$ φύλλα. Άρα, οι πιθανοί συνδυασμοί εδώ, είναι $\binom{46}{5} = \frac{46!}{5! \cdot 41!} = 1370754$ συνδυασμοί.

- α) Πρέπει να βρούμε τις ευνοϊκές περιπτώσεις όπου στα 5 κρυφά φύλλα υπάρχουν 2 από τους 4 Άσσους και 3 από τα υπόλοιπα 42 φύλλα της τράπουλας (42 γιατί αφαιρούμε και τους 4 Άσσους, πέρα από τα 6 φύλλα που μοιράστηκαν στους 3 παίκτες). Άρα, οι ευνοϊκοί συνδυασμοί είναι $\binom{4}{2} \cdot \binom{42}{3} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{42!}{3! \cdot 39!} = 68880$ συνδυασμοί. Άρα, η πιθανότητα προκύπτει από την διαίρεση των ευνοϊκών συνδυασμών προς το σύνολο των συνδυασμών, δηλαδή $\frac{68880}{1370754} \simeq 0.05$.
- β) Αντίστοιχα με το ερώτημα (α), έχουμε τους εξής ευνοϊκούς συνδυασμούς: $\binom{4}{3} \cdot \binom{42}{2} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot \frac{42!}{2! \cdot 40!} = 3444$. Άρα, η πιθανότητα να έχουμε 3 K είναι $\frac{3444}{1370754} \simeq 0.002$.

- γ) Η πιθανότητα αυτή προκύπτει αθροίζοντας τις πιθανότητες στο α) και β) και αφαιρώντας την πιθανότητα της τομής, δηλαδή την πιθανότητα να έχουμε 2 Άσσους **και** 3 Πηγάδες στα 5 κρυφά φύλλα. Οι ευνοϊκοί τρόποι να συμβεί αυτό είναι $\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{3} = 24$ που μας δίνει πιθανότητα τομής ίση με $\frac{24}{1370754} = 1.75110^{-5}$. Συνεπώς η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(2A) + P(3K) - P(2A \cap 3K) \simeq 0.052$.

Άσκηση 3

Έστω ότι 90 (διαφορετικοί) φοιτητές εισέρχονται σε δύο αίθουσες εξετάσεων, την αίθουσα Α με χωρητικότητα 60 (διαφορετικών) θέσεων και την αίθουσα Β με χωρητικότητα 40 (διαφορετικών) θέσεων. (Στα ερωτήματα μας ενδιαφέρει όχι μόνο ποιοι φοιτητές θα μπου στην κάθε αίθουσα αλλά και σε ποιες θέσεις θα καθίσουν.)

- α) Υπολογίστε το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων των φοιτητών στις δύο αίθουσες.
 β) Έστω ότι από τους 90 (διαφορετικούς) φοιτητές, 50 είναι κορίτσια και 40 είναι αγόρια. Υπολογίστε το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων των φοιτητών στις δύο αίθουσες αν όλα τα αγόρια καθίσουν στην ίδια αίθουσα.

Λύση:

- α) Έχουμε $k = 90$ τοποθέτηση διαφορετικών αντικειμένων (οι διαφορετικοί φοιτητές) σε $n = 60 + 40$ διαφορετικές υποδοχές (οι διαφορετικές θέσεις στις δύο αίθουσες), όπου κάθε υποδοχή λαμβάνει το πολύ ένα αντικείμενο. Άρα έχουμε $P(100, 90) = \frac{100!}{10!}$ διαφορετικές τοποθετήσεις των φοιτητών.
 β) Εξετάζουμε δύο αμοιβαία αποκλειόμενες περιπτώσεις:
 1) Όλα τα 40 αγόρια τοποθετούνται στην αίθουσα Α. Όπως στο ερώτημα (α), αυτό γίνεται με $P(60, 40)$ διαφορετικούς τρόπους. Τώρα μας μένουν 60 θέσεις (20 θέσεις στην αίθουσα Α και 40 θέσεις στην αίθουσα Β), στις οποίες τοποθετούμε τα κορίτσια. Έχουμε $P(60, 50)$ δυνατούς τρόπους τοποθέτησης των κοριτσιών σε αυτές τις θέσεις. Άρα, από τη βασική αρχή της απαρίθμησης, το συνολικό πλήθος των τοποθετήσεων στην περίπτωση 1) είναι $P(60, 40) \cdot P(60, 50)$.
 2) Όλα τα 40 αγόρια τοποθετούνται στην αίθουσα Β. Αυτό γίνεται με $P(40, 40)$ τρόπους. Τώρα μας μένουν 60 θέσεις στην αίθουσα Α στις οποίες τοποθετούμε τα κορίτσια με $P(60, 50)$ τρόπους. Άρα, από τη βασική αρχή της απαρίθμησης, το συνολικό πλήθος των τοποθετήσεων στην περίπτωση (2) είναι $P(40, 40) \cdot P(60, 50)$. Αφού οι περιπτώσεις (1) και (2) είναι αμοιβαία αποκλειόμενες, από τον κανόνα του αθροίσματος έχουμε ότι το συνολικό πλήθος των τοποθετήσεων είναι $P(60, 40) \cdot P(60, 50) + P(40, 40) \cdot P(60, 50)$.

Άσκηση 4

Από ένα σύνολο των 25 καθηγητών (10 άνδρες και 15 γυναίκες) ενός σχολείου, να υπολογιστεί το πλήθος των διαφορετικών εξαμελών επιτροπών όταν όλα τα μέλη είναι:

- α) Ισότιμα, δηλαδή οι ρόλοι που τους ανατίθενται είναι ταυτόσημοι.
 β) Ισότιμα, και οι γυναίκες-μέλη είναι περισσότερες από τους άνδρες μέλη.

Λύση:

- α) Αφού τα 6 μέλη της επιτροπής είναι ισότιμα και δεν μπορούμε να επιλέξουμε κάποιον καθηγητή περισσότερες από μία φορές, πρόκειται για ένα πρόβλημα συνδυασμών 6 από 25 καθηγητές χωρίς επανάληψη. Άρα το πλήθος των επιτροπών είναι: $\binom{25}{6} = \frac{25!}{6!19!} = 177100$.
- β) Όπως και στο (α), έχουμε ένα πρόβλημα συνδυασμών χωρίς επανάληψη. Επειδή όμως οι γυναίκες πρέπει να είναι περισσότερες από τους άνδρες, η επιτροπή μπορεί να αποτελείται είτε (ι) από 6 γυναίκες, είτε (ii) από 5 γυναίκες και 1 άνδρα, είτε (iii) από 4 γυναίκες και 2 άνδρες.
- Παρόμοια με το (α), οι διαφορετικές επιτροπές που αποτελούνται από 6 γυναίκες είναι: $\binom{15}{6} = \frac{15!}{6!9!} = 5.005$. Στην περίπτωση (ii), οι τρόποι να επιλέξουμε τις 5 γυναίκες της επιτροπής είναι: $\binom{15}{5} = \frac{15!}{5!10!} = 3.003$. Υπάρχουν ακόμη $\binom{10}{1} = 10$ τρόποι να επιλέξουμε το μέλος της επιτροπής που είναι άνδρας. Εφαρμόζοντας τη βασική αρχή της απαρίθμησης, καταλήγουμε ότι οι διαφορετικές επιτροπές που αποτελούνται από 5 γυναίκες και 1 άνδρα είναι: $\binom{15}{5} \cdot \binom{10}{1} = 3003 \cdot 10 = 30.030$.
- Ομοίως, οι διαφορετικές επιτροπές με 4 γυναίκες και 2 άνδρες είναι: $\binom{15}{4} \cdot \binom{10}{2} = 1.365 \cdot 45 = 61.425$.
- Παρατηρούμε ότι τα γεγονότα (ι), (ii) και (iii) είναι αμοιβαία αποκλειόμενα. Οπότε, εφαρμόζοντας τον κανόνα του αθροίσματος, έχουμε ότι το συνολικό πλήθος των εξαμελών επιτροπών όπου οι γυναίκες είναι περισσότερες από τους άνδρες είναι: $5.005 + 30.030 + 61.425 = 96.460$.

Άσκηση 5

Στο πλαίσιο διαφημιστικής εκστρατείας, μια εταιρία διοργανώνει ένα διαγωνισμό στον οποίο μοιράζονται λαχνοί. Οι λαχνοί περιέχουν όλους τους δυνατούς αναγραμματισμούς του ΠΟΛΛΑ-ΔΩΡΑ (π.χ., ΑΛΛΑΩΠΔΡΟ, ΡΑΑΟΠΛΔΩΛ, κλπ). Κερδίζουν όσοι λαχνοί εμφανίζουν κάποια (τουλάχιστον μία) από τις λέξεις ΠΟΛΛΑ ή ΔΩΡΑ. Π.χ., οι λαχνοί ΠΟΛΛΑΑΔΡΩ, ΑΠΛΛΟ-ΔΩΡΑ και ΔΩΡΑΠΟΛΛΑ είναι νικηφόροι

- α) Υπολογίστε το συνολικό πλήθος των λαχνών.
- β) Υπολογίστε το πλήθος των νικηφόρων λαχνών.
- γ) Έστω ότι λαμβάνουμε ένα τυχαίο λαχνό από ένα κιβώτιο το οποίο περιλαμβάνει μόνο τους λαχνούς που ξεκινούν με το γράμμα Δ. Ποια είναι η πιθανότητα ο λαχνός μας να είναι νικηφόρος;

Λύση:

- α) Εφαρμόζουμε τον τύπο των επαναληπτικών μεταθέσεων s αντικειμένων $a_1, a_2, \dots, a_s$ όπου το a_i επαναλαμβάνεται n_i φορές και $n_1 + \dots + n_s = n$ (δείτε Πρόβλημα 58, σελίδες 79-80, βιβλίο Μπερτσέκ-Τσιτισιλή). Έχουμε $s = 7$ αντικείμενα σε $n = 9$ θέσεις, όσες αυτές που καταλαμβάνουν όλα τα γράμματα του ΠΟΛΛΑΔΩΡΑ, όπου $a_1 = \Pi$ με $n_1 = 1$, $a_2 = O$ με $n_2 = 1$, $a_3 = \Lambda$ με $n_3 = 2$, $a_4 = A$ με $n_4 = 2$, $a_5 = \Delta$ με $n_5 = 1$, $a_6 = \Omega$ με $n_6 = 1$ και $a_7 = P$ με $n_7 = 1$. Άρα έχουμε $\frac{9!}{1!1!2!2!1!1!1!} = 90.720$ λαχνούς.
- β) Έστω M το σύνολο των λαχνών που περιέχουν τη λέξη ΠΟΛΛΑ και G το σύνολο των λαχνών που περιέχουν τη λέξη ΔΩΡΑ. Τότε, το πλήθος των νικηφόρων λαχνών είναι $N = |M \cup G|$. Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού έχουμε $|M \cup G| = |M| + |G| - |M \cap G|$. Για να υπολογίσουμε τον πληθύνισμο του συνόλου M θεωρούμε τη λέξη ΠΟΛΛΑ ως ένα

σύμβολο. Έτσι, μετράμε το πλήθος των δυνατών μεταθέσεων 5 διαφορετικών αντικειμένων (ΠΟΛΛΑ, Δ, Ω, Ρ, Α) που είναι $P(5, 5) = 5!$, δηλαδή $|M| = 5!$. Με ανάλογο σκεπτικό έχουμε $|G| = \frac{6!}{2!}$, αφού έχουμε τις επαναληπτικές μεταθέσεις των $s = 6$ συμβόλων $s_1=\Delta\Omega\text{ΡΑ}$, $s_2=\Pi$, $s_3=\text{Ο}$, $s_4=\Lambda$, $s_5=\Lambda$, $s_6=\text{Α}$, όπου ένα σύμβολο (το Λ) εμφανίζεται $n_4=2$ φορές και τα υπόλοιπα από μία ($n_1 = n_2 = n_3 = n_5 = n_6 = 1$). Το σύνολο $|M \cap G|$ αποτελείται από τους λαχνούς στους οποίους εμφανίζονται οι δύο λέξεις ΠΟΛΛΑ και ΔΩΡΑ μαζί, δηλαδή από 2 λαχνούς (ΠΟΛΛΑΔΩΡΑ και ΔΩΡΑΠΟΛΛΑ), άρα έχουμε $|\Pi \cap \Delta| = 2$. Συνεπώς, $|\Pi| + |\Delta| - |\Pi \cap \Delta| = 5! + \frac{6!}{2!} - 2 = 478$ νικηφόρους λαχνούς.

- γ) Αφού κάθε λαχνός στο κιβώτιο ξεκινά με το γράμμα Δ, το πλήθος των λαχνών δίνεται από τις επαναληπτικές μεταθέσεις των υπόλοιπων γραμμάτων, όπου έχουμε από 2 φορές τα γράμματα Λ και Α, και από 1 φορά τα γράμματα Π, Ο, Ω και Ρ. Άρα έχουμε $K = \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 10.080$ λαχνούς στο κιβώτιο.

Έστω Π' το σύνολο των λαχνών του κιβωτίου που περιέχουν τη λέξη ΠΟΛΛΑ και Δ' το σύνολο των λαχνών του κιβωτίου που περιέχουν τη λέξη ΔΩΡΑ. Τότε, το πλήθος N' των νικηφόρων λαχνών είναι $N' = |\Pi' \cup \Delta'|$. Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού έχουμε $|\Pi' \cup \Delta'| = |\Pi'| + |\Delta'| - |\Pi' \cap \Delta'|$. Για να υπολογίσουμε τον πληθάνημο του συνόλου Π' θεωρούμε τη λέξη ΠΟΛΛΑ ως ένα σύμβολο. Έτσι, μετράμε το πλήθος των δυνατών μεταθέσεων τεσσάρων διαφορετικών συμβόλων (ΠΟΛΛΑ, Ω, Ρ, Α) που είναι $P(4, 4) = 4!$, δηλαδή $|\Pi'| = 4!$.

Οι λαχνοί του συνόλου Δ' ξεκινούν όλοι με τη λέξη ΔΩΡΑ, άρα μετράμε τις επαναληπτικές μεταθέσεις των τεσσάρων γραμμάτων Π, Ο, Λ, Α, όπου όμως το Λ εμφανίζεται 2 φορές, οι οποίες είναι $|\Delta'| = \frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{5!}{2}$.

Το σύνολο $|\Pi' \cap \Delta'|$ αποτελείται από τους λαχνούς στους οποίους εμφανίζονται οι δύο λέξεις ΠΟΛΛΑ και ΔΩΡΑ μαζί, δηλαδή από 1 λαχνό (ΔΩΡΑΠΟΛΛΑ), άρα έχουμε $|\Pi' \cap \Delta'| = 1$. Συνεπώς, $N' = |\Pi' \cup \Delta'| = |\Pi'| + |\Delta'| - |\Pi' \cap \Delta'| = 4! + \frac{5!}{2} - 1 = 83$. Άρα, η πιθανότητα ο λαχνός μας να είναι νικηφόρος είναι $\frac{N'}{K} = \frac{83}{10.080} \simeq 0.0082$.

Άσκηση 6

Η συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) της τ.μ. X δίνεται από την σχέση: $p_X(x) = \frac{3x}{c}$ για $x = 0, 1, 2, 3$.

- Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς c .
- Υπολογίστε τη μέση τιμή $E[X]$ της τ.μ. X .

Λύση:

- α) Για να υπολογίσουμε το c , θα χρησιμοποιήσουμε την βασική ιδιότητα των σ.π., ότι

$$\sum_{i=1}^m p_X(x_i) = 1.$$

Άρα, θα πρέπει $\frac{3 \cdot 0}{c} + \frac{3 \cdot 1}{c} + \frac{3 \cdot 2}{c} + \frac{3 \cdot 3}{c} = 1 \iff \frac{0+3+6+9}{c} = 1 \iff c = 18$.

- β) Για να υπολογίσουμε τη μέση τιμή $E[X]$ της τ.μ. X χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$E[X] = \sum_{i=1}^m x_i \cdot p_X(x_i)$$

$$\text{Άρα, έχουμε } E[X] = \sum_{i=1}^m x_i \cdot p_X(x_i) = \left(\frac{3 \cdot (0)}{18} \cdot (0)\right) + \left(\frac{3 \cdot (1)}{18} \cdot (1)\right) + \left(\frac{3 \cdot (2)}{18} \cdot (2)\right) + \left(\frac{3 \cdot (3)}{18} \cdot (3)\right) = 0 + \frac{3}{18} + \frac{12}{18} + \frac{27}{18} = \frac{42}{18} \simeq 2.33$$

Άσκηση 7

Ρίχνουμε 3 τρίεδρα δίκαια ζάρια και ορίζουμε ως την μεταβλητή X το άθροισμα των 3 ζαριών.

- α) Υπολογίστε την πιθανότητα το άθροισμα των 3 ζαριών να είναι 5.
- β) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας και τη μέση τιμή $E[X]$ της τ.μ. X .

Λύση:

- α) Αρχικά, πρέπει να υπολογίσουμε πόσα είναι τα αποτελέσματα που μπορεί να προκύψουν. Τα ζάρια είναι τρίεδρα, άρα έχουμε $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ αποτελέσματα. Έπειτα, πρέπει να υπολογίσουμε πόσες διατεταγμένες τριάδες έχουν άθροισμα 5. Οι τριάδες με άθροισμα 5 είναι οι εξής:

- 1 (1,1,3)
- 2 (1,3,1)
- 3 (3,1,1)
- 4 (2,2,1)
- 5 (1,2,2)
- 6 (2,1,2)

Άρα, 6 πιθανά ενδεχόμενα έχουν άθροισμα 5. Έτσι, η πιθανότητα το X να είναι ίσο με 5, είναι $\frac{6}{27}$

- β) Για αυτό το ερώτημα χρειάζεται να υπολογίσουμε τις πιθανότητες για όλα τα X . Αν μετρήσουμε όλα τα ενδεχόμενα έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

- $X = 3$:
 - * $X = 3$: 1 ενδεχόμενο, το (1,1,1)
 - * $P(X = 3) = \frac{1}{27}$
- $X = 4$:
 - * $X = 4$: 3 ενδεχόμενα, τα (1,1,2), (1,2,1) και (2,1,1)
 - * $P(X = 4) = \frac{3}{27}$
- $X = 5$:
 - * $X = 5$: 6 ενδεχόμενα, τα (1,1,3), (1,3,1), (3,1,1), (2,2,1), (1,2,2) και (2,1,2)
 - * $P(X = 5) = \frac{6}{27}$
- $X = 6$:
 - * $X = 6$: 7 ενδεχόμενα, τα (1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1) και (2,2,2)
 - * $P(X = 6) = \frac{7}{27}$
- $X = 7$:
 - * $X = 7$: 6 ενδεχόμενα, τα (1,3,3), (3,1,3), (3,3,1), (2,2,3), (2,3,2) και (3,2,2)
 - * $P(X = 7) = \frac{6}{27}$
- $X = 8$:
 - * $X = 8$: 3 ενδεχόμενα, τα (2,3,3), (3,3,2) και (3,2,3)
 - * $P(X = 8) = \frac{3}{27}$

– $X = 9$:

* $X = 9$: 1 ενδεχόμενο, το (3,3,3)

* $P(X = 9) = \frac{1}{27}$

Συνεπώς, η σ.π. της X είναι:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{27} & x = 3 \\ \frac{3}{27} & x = 4 \\ \frac{6}{27} & x = 5 \\ \frac{7}{27} & x = 6 \\ \frac{6}{27} & x = 7 \\ \frac{3}{27} & x = 8 \\ \frac{1}{27} & x = 9 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής, χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$E[X] = \sum_{i=1}^m x_i \cdot p_X(x_i).$$

Έτσι, προκύπτει ότι $E[X] = 3 \cdot \frac{1}{27} + 4 \cdot \frac{3}{27} + 5 \cdot \frac{6}{27} + 6 \cdot \frac{7}{27} + 7 \cdot \frac{6}{27} + 8 \cdot \frac{3}{27} + 9 \cdot \frac{1}{27} = 6$.
Βεβαίως στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε χωρίς πράξεις αν παρατηρήσουμε ότι η σ.π. της τ.μ. X είναι συμμετρική γύρω από το $x = 6$.