

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 16/10/2023

Ημερομηνία Παράδοσης: 01/11/2023

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας e-learn του μαθήματος, **εδώ**. Παραδόσεις με e-μειλ, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα ΠΔΦ που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκανάρисματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Θέματα: Δεσμευμένη Πιθανότητα, Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας-Κανόνας του Bayes, Ανεξαρτησία.

Άσκηση 1

Ο Δήμος μιας περιοχής έχει αμελήσει να υλοποιήσει τα απαραίτητα αντιπλημμυρικά έργα, και σε έναν βαρύ χειμώνα πλημμύρησαν τρία χωριά του, ο Παλαμάς, η Λυγαριά και το Μεσοχώρι. Στον Παλαμά, το 50% των κατοίκων δεν έχουν ρεύμα, στην Λυγαριά το 20%, και στο Μεσοχώρι το 20%. Γνωρίζουμε ακόμα ότι οι κάτοικοι του Παλαμά αποτελούν το 50% του συνολικού πληθυσμού των παραπάνω χωριών, ενώ οι κάτοικοι του Μεσοχωρίου 20%. Επιλέγουμε τυχαία έναν κάτοικο από τα τρία χωριά.

α') Ποια είναι η πιθανότητα να έχει μείνει χωρίς ρεύμα;

β') Δεδομένου ότι είναι χωρίς ρεύμα, ποια η πιθανότητα να είναι κάτοικος του Παλαμά;

Λύση

Έστω τα ενδεχόμενα:

X: ο κάτοικος είναι χωρίς ρεύμα.

Π: ο κάτοικος είναι από τον Παλαμά.

Λ: ο κάτοικος είναι από την Λυγαριά.

Μ: ο κάτοικος είναι από το Μεσοχώρι.

Από την εκφώνηση μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

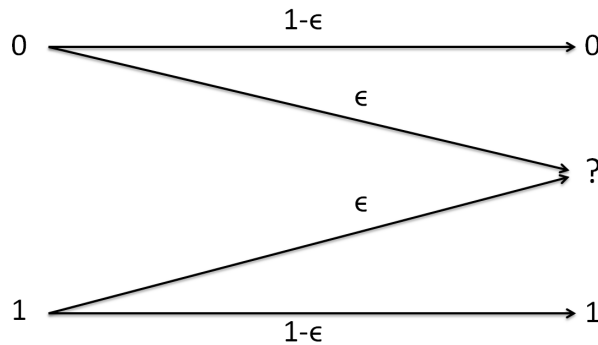
$$P(\Pi)=0.5, P(M)=0.2, P(\Lambda)=1-P(\Pi)-P(M)=0.3 \text{ και } P(X|\Pi)=0.5, P(X|\Lambda)=0.2, P(X|M)=0.2$$

α') Από ΘΟΠ έχουμε ότι $\Pi(X) = \Pi(X|\Pi)\Pi(\Pi) + \Pi(X|\Lambda)\Pi(\Lambda) + \Pi(X|M)\Pi(M) = 0.35$

β') Από την χρήση του ορισμού δεσμευμένης πιθανότητας προκύπτει ότι: $P(\Pi | X) = \frac{P(X|\Pi)P(\Pi)}{P(X)} = \frac{0.5 \cdot 0.5}{0.35} \approx 0.71$.

Άσκηση 2

Το Σχήμα 1 δείχνει τις πιθανότητες μετάβασης ενός Δυαδικού Καναλιού με Διαγραφές. Συγκεκριμένα, όταν στέλνεται 0 ή 1, αυτό φτάνει χωρίς σφάλματα με πιθανότητα $1 - \epsilon$, ενώ με πιθανότητα ϵ φτάνει διεγγραμμένο από τον θόρυβο. Όπως φαίνεται, το αλφάβητο εισόδου είναι το $\{0, 1\}$ και το αλφάβητο εξόδου είναι το $\{0, 1, ?\}$. Υποθέστε ότι τα σύμβολα 0 και 1 στέλνονται με πιθανότητα $1/3$ και $2/3$, αντίστοιχα.



Σχήμα 1: Δυαδικό Κανάλι με Διαγραφές

α') Βρείτε τις πιθανότητες λήψης συμβόλων.

β') Δεδομένου ότι ελήφθη το σύμβολο ?, ποια είναι η πιθανότητα να εστάλη 0 και ποια να εστάλη 1;

γ') Έστω ότι λάβαμε την ακολουθία 1??. Βρείτε τις πιθανότητες για όλους τους πιθανούς συνδυασμούς ακολουθιών στην είσοδο για αυτήν την έξοδο. Ποια είναι η πιο πιθανή είσοδος;

Λύση

Έστω Y η έξοδος του καναλιού και X η είσοδος.

α') $P(Y = 0) = \frac{1}{3}(1 - \epsilon)$, $P(Y = 1) = \frac{2}{3} \cdot (1 - \epsilon)$, $P(Y = ?) = \frac{1}{3}\epsilon + \frac{2}{3}\epsilon = \epsilon$.

β') $P(X = 0 | Y = ?) = \frac{P(Y = ? | X = 0)P(X = 0)}{P(Y = ?)} = \frac{\frac{\epsilon}{3}}{\epsilon} = \frac{1}{3}$
 $P(X = 1 | Y = ?) = \frac{P(Y = ? | X = 1)P(X = 1)}{P(Y = ?)} = \frac{\frac{2\epsilon}{3}}{\epsilon} = \frac{2}{3}$

γ') $P(Y = 100 | X = 1??) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$,
 $P(Y = 101 | X = 1??) = P(Y = 110 | X = 1??) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$,
 $P(Y = 111 | X = 1??) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

Επομένως η πιο πιθανή είσοδος είναι η 111.

Άσκηση 3

Μας δίνονται δύο 'πειραγμένα' νομίσματα εκ των οποίων το ένα φέρνει κεφαλή με πιθανότητα $1/4$ και το άλλο φέρνει κεφαλή με πιθανότητα $3/4$. Τα δύο νομίσματα φαίνονται να είναι πανομοιότυπα: δεν μπορούμε να τα ξεχωρίσουμε εξ όψεως. Ρίχνουμε τα δύο νομίσματα από μία φορά το καθένα διαλέγοντας στην τύχη (με πιθανότητα $1/2$) ποιο θα ρίξουμε πρώτο. Ορίζουμε τα γεγονότα: $H_i = \{ \text{η } i\text{-στή ρίψη φέρνει κεφαλή} \}$, $i = 1, 2$.

α') Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(H_1)$ και $P(H_2)$.

β') Υπολογίστε την πιθανότητα ότι και οι δύο ρίψεις φέρνουν κεφαλή, δηλαδή $P(H_1 \cap H_2)$.

γ') Είναι τα γεγονότα H_1 και H_2 ανεξάρτητα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση

α') Ορίζουμε το γεγονός $A : \{\text{Το κέρμα με πιθανότητα κεφαλής } \frac{1}{4} \text{ ρίχνεται πρώτο}\}$.

Τότε, προφανώς ισχύει ότι: $A^c : \{\text{Το κέρμα με πιθανότητα κεφαλής } \frac{3}{4} \text{ ρίχνεται πρώτο}\}$.

Χρησιμοποιώντας αυτή τη διαμέριση του δειγματοχώρου, εφαρμόζουμε το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας, και έχουμε:

$$P(H_1) = P(H_1 | A) \cdot P(A) + P(H_1 | A^c) \cdot P(A^c) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Ομοίως, έχουμε:

$$P(H_2) = P(H_2 | A) \cdot P(A) + P(H_2 | A^c) \cdot P(A^c) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

β') Αν γνωρίζουμε ποιο νόμισμα ρίχνουμε πρώτο και ποιο δεύτερο, εφόσον οι ρίψεις είναι ανεξάρτητες, τα αποτελέσματά τους θα είναι ανεξάρτητα. Επομένως, $P(H_1 \cap H_2 | A) = P(H_1 | A) \cdot P(H_2 | A)$.

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(H_1 \cap H_2) &= P(A) \cdot P(H_1 \cap H_2 | A) + P(A^c) \cdot P(H_1 \cap H_2 | A^c) \\ &= P(A) \cdot P(H_1 | A) \cdot P(H_2 | A) + P(A^c) \cdot P(H_1 | A^c) \cdot P(H_2 | A^c) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

γ') Από τα παραπάνω ερωτήματα είναι προφανές ότι:

$$P(H_1 \cap H_2) = \frac{3}{16} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(H_1) \cdot P(H_2)$$

Συνεπώς, τα γεγονότα H_1, H_2 δεν είναι ανεξάρτητα (αν και είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητα, δεδομένου του γεγονότος A).

Άσκηση 4

Τρεις φίλοι, ο Κώστας, ο Γιώργος και ο Παύλος, αποφασίζουν να παίξουν ένα μικρό πρωτάθλημα στο μονό μπάσκετ. Το παιχνίδι έχει ως εξής. Στην πρώτη φάση του παιχνιδιού, παίζει ο Κώστας με τον Γιώργο και ο νικητής παίζει με τον Παύλο. Στην δεύτερη φάση παίζουν οι χαμένοι και ο νικητής παίζει με τον νικητή της πρώτης φάσης. Αν τους νικήσει ξανά, το πρωτάθλημα λήγει και ανακηρύσσεται νικητής. Αλλιώς, ξαναπαίζεται άλλος ένας γύρος όπου το πρωτάθλημα επαναλαμβάνεται. Αυτό συνεχίζεται ως ώτου έχουμε κάποιον νικητή.

Υποθέστε ότι ο νικητής της πρώτης φάσης του πρώτου γύρου είναι ο Παύλος. Επομένως, στην δεύτερη φάση θα παίξουν ο Κώστας και ο Γιώργος και ο νικητής θα παίζει με τον Παύλο ξανά. Υποθέστε ότι όλα τα παιχνίδια είναι ανεξάρτητα.

Από την εμπειρία των μεταξύ τους παιχνιδιών ξέρουμε ότι:

- Η πιθανότητα ο Κώστας να κερδίσει τον Γιώργο σε κάποιο παιχνίδι είναι 0.6.
- Η πιθανότητα ο Παύλος να κερδίσει τον Κώστα σε κάποιο παιχνίδι είναι 0.5.
- Η πιθανότητα ο Παύλος να κερδίσει τον Γιώργο σε κάποιο παιχνίδι είναι 0.7

α') Βρείτε τις εκ των προτέρων πιθανότητες των παρακάτω γεγονότων.

- i. Ο Κώστας είναι ο νικητής του πρώτου γύρου, δηλ. νικάει και τον Γιώργο και τον Παύλο.
- ii. Να χρειαστεί να παχτεί δεύτερος γύρος.
- iii. Ο Παύλος είναι ο τελικός νικητής από τον πρώτο γύρο.

β') Δεδομένου ότι χρειάζεται να γίνει και ο δεύτερος γύρος, βρείτε τις δεσμευμένες πιθανότητες των παρακάτω γεγονότων.

- i. Ο Κώστας είναι ο νικητής του πρώτου γύρου.
- ii. Ο Γιώργος είναι ο νικητής του πρώτου γύρου.
- iii. Ο Παύλος είναι ο νικητής του πρώτου γύρου.

γ') Είναι ανεξάρτητα τα ενδεχόμενα να παιχτεί δεύτερος γύρος και

- i. να νικήσει ο Παύλος στον πρώτο γύρο;
- ii. να νικήσει ο Κώστας στον πρώτο γύρο;

Λύση

Έστω B το γεγονός ότι χρειάζεται να γίνει δεύτερος γύρος, K το γεγονός ότι ο Κώστας είναι νικητής του πρώτου γύρου και Π το γεγονός ότι ο νικητής είναι ο Παύλος. Έστω $K\Gamma$ το γεγονός ότι σε κάποιο παιχνίδι ο Κώστας νικάει τον Γιώργο, ΠK ότι ο Παύλος νικάει τον Κώστα και $\Pi\Gamma$ ότι ο Παύλος νικάει τον Γιώργο. Τότε οι ζητούμενες πιθανότητες είναι:

α') i. $P(K) = 0.6 \cdot 0.5 = 0.3$.

ii.

$$\begin{aligned} P(B) &= P(K\Gamma \cap \Pi K^c \cup K\Gamma^c \cap \Pi\Gamma^c) \\ &= P(K\Gamma \cap \Pi K^c) + P(K\Gamma^c \cap \Pi\Gamma^c) - P(K\Gamma \cap \Pi K^c \cap K\Gamma^c \cap \Pi\Gamma^c) \\ &= P(K\Gamma)P(\Pi K^c) + P(K\Gamma^c)P(\Pi\Gamma^c) - 0 \\ &= 0.6 \cdot (1 - 0.5) + (1 - 0.6) \cdot (1 - 0.7) \\ &= 0.42. \end{aligned}$$

iii. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $1 - P(B) = 0.42$.

β') i. $P(K\Gamma \cap \Pi K^c | B) = \frac{P(K\Gamma \cap \Pi K^c \cap B)}{P(B)} = \frac{P(K\Gamma \cap \Pi K^c)}{P(B)} = \frac{0.6 \cdot (1-0.5)}{0.42} \approx 0.71$,
όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει επειδή αν ο Κώστας νικήσει και τον Γιώργο και τον Παύλο, τότε σίγουρα θα παιχτεί ο δεύτερος γύρος.

ii. $P(K\Gamma^c \cap \Pi\Gamma^c | B) = \frac{P(K\Gamma^c \cap \Pi\Gamma^c \cap B)}{P(B)} = \frac{0.4 \cdot 0.3}{0.42} \approx 0.29$,

iii. $P(K\Gamma^c \cap \Pi\Gamma | B) + P(K\Gamma \cap \Pi K | B) = 0$, γιατί αν νικήσει ο Παύλος τον νικητή της πρώτης φάσης, τότε δεν θα παιχτεί δεύτερος γύρος.

γ') i. $P(B | \text{Κέρδισε ο Παύλος στον πρώτο γύρο}) = 0 \neq 0.42 = P(B)$, άρα δεν είναι ανεξάρτητα.

ii. $P(B | \text{Κέρδισε ο Κώστας στον πρώτο γύρο}) = 1 \neq 0.42 = P(B)$, άρα δεν είναι ανεξάρτητα.

Άσκηση 5

Μία ασφαλιστική εταιρεία κατατάσσει τους ανθρώπους σε 3 κατηγορίες, ανάλογα με την επικινδυνότητά τους στην οδήγηση: κατηγορία μικρού, μέτριου και μεγάλου ρίσκου. Τα αρχεία της εταιρείας δείχνουν ότι οι πιθανότητες οι πελάτες μικρού, μέσου και μεγάλου ρίσκου να έχουν ατύχημα κατά τη διάρκεια ενός έτους είναι 0.05, 0.2 και 0.3 αντίστοιχα.

α') Αν το 10% του πληθυσμού αποτελείται από άτομα μικρού ρίσκου, το 50% από άτομα μέτριου ρίσκου και το υπόλοιπο 40% από άτομα μεγάλου ρίσκου, να υπολογιστεί το ποσοστό του πληθυσμού που δεν έχει κανένα ατύχημα κατά τη διάρκεια ενός έτους.

β') Αν κάποιος ασφαλισμένος είχε τουλάχιστον ένα ατύχημα κάποιο έτος, να υπολογιστούν οι πιθανότητες να είναι άτομο:

- i. Μικρού ρίσκου
- ii. Μέτριου ρίσκου
- iii. Μεγάλου ρίσκου

Λύση

Θεωρούμε τα εξής ενδεχόμενα:

G : {Κάποιος τυχαίος άνθρωπος είναι καλός οδηγός}

M : {Κάποιος τυχαίος άνθρωπος είναι μέτριος οδηγός}

B : {Κάποιος τυχαίος άνθρωπος είναι κακός οδηγός}

A : {Κάποιος τυχαίος οδηγός παθαίνει ατύχημα}

α') Με βάση το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας, έχουμε:

$$P(A^c) = P(A^c | G) \cdot P(G) + P(A^c | M) \cdot P(M) + P(A^c | B) \cdot P(B) = 0.95 \cdot 0.1 + 0.8 \cdot 0.5 + 0.7 \cdot 0.4 = 0.775.$$

β') Με βάση τον Κανόνα του *Bayes*, έχουμε:

i.

$$P(G | A) = \frac{P(A | G) \cdot P(G)}{P(A)} = \frac{0.05 \cdot 0.1}{0.225} \approx 0.22$$

ii.

$$P(M | A) = \frac{P(A | M) \cdot P(M)}{P(A)} = \frac{0.2 \cdot 0.5}{0.225} \approx 0.44$$

iii. $P(B | A) = 1 - P(G | A) - P(M | A) \approx 0.33$.