

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 16/10/2023

Ημερομηνία Παράδοσης: 01/11/2023

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η παράδοση των ασκήσεών σας θα γίνεται ηλεκτρονικά, **ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΑ** μέσω της σελίδας ε-λεαρν του μαθήματος, **εδώ**. Παραδόσεις με ε-μειλ, ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο δε θα γίνονται δεκτές και θα **μηδενίζονται**.
- Για την παράδοση, θα πρέπει να σκανάρετε ή να φωτογραφίσετε τις κόλλες των ασκήσεών σας και στη συνέχεια να φτιάξετε ένα ΠΔΦ που θα περιλαμβάνει αυτές τις φωτογραφίες, δηλαδή το σύνολο της λυμένης σειράς ασκήσεων.
- Αριθμήστε τις σελίδες των ασκήσεών σας (από την άσκηση 1, στην άσκηση 2, στην άσκηση 3 κ.ο.κ.) και **ΣΙΓΟΥΡΕΥΤΕΙΤΕ** ότι τα σκανάρσματα που έχετε κάνει έχουν δημιουργήσει εικόνες στις οποίες είναι **ΕΥΔΙΑΚΡΙΤΕΣ** και **ΕΥΚΟΛΟΔΙΑΒΑΣΤΕΣ** οι λύσεις σας. Θολές, και γενικότερα θορυβώδεις, εικόνες ενδέχεται να καταστήσουν αδύνατη τη διαδικασία της διόρθωσης και κατ' επέκταση να οδηγήσουν σε μηδενισμό των ασκήσεών σας.

Θέματα: Δεσμευμένη Πιθανότητα, Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας-Κανόνας του Bayes, Ανεξαρτησία.

Άσκηση 1

Ο Δήμος μιας περιοχής έχει αμελήσει να υλοποιήσει τα απαραίτητα αντιπλημμυρικά έργα, και σε έναν βαρύ χειμώνα πλημμύρησαν τρία χωριά του, ο Παλαμάς, η Λυγαριά και το Μεσοχώρι. Στον Παλαμά, το 50% των κατοίκων δεν έχουν ρεύμα, στην Λυγαριά το 20%, και στο Μεσοχώρι το 20%. Γνωρίζουμε ακόμα ότι οι κάτοικοι του Παλαμά αποτελούν το 50% του συνολικού πληθυσμού των παραπάνω χωριών, ενώ οι κάτοικοι του Μεσοχωρίου 20%. Επιλέγουμε τυχαία έναν κάτοικο από τα τρία χωριά.

α') Ποια είναι η πιθανότητα να έχει μείνει χωρίς ρεύμα;

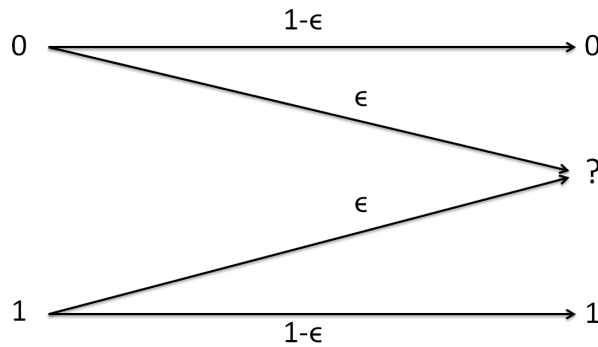
β') Δεδομένου ότι είναι χωρίς ρεύμα, ποια η πιθανότητα να είναι κάτοικος του Παλαμά;

Άσκηση 2

Το Σχήμα 1 δείχνει τις πιθανότητες μετάβασης ενός Δυαδικού Καναλιού με Διαγραφές. Συγκεκριμένα, όταν στέλνεται 0 ή 1, αυτό φτάνει χωρίς σφάλματα με πιθανότητα $1 - \epsilon$, ενώ με πιθανότητα ϵ φτάνει διεγραμμένο από τον θόρυβο. Όπως φαίνεται, το αλφάβητο εισόδου είναι το $\{0, 1\}$ και το αλφάβητο εξόδου είναι το $\{0, 1, ?\}$. Υποθέστε ότι τα σύμβολα 0 και 1 στέλνονται με πιθανότητα $1/3$ και $2/3$, αντίστοιχα.

α') Βρείτε τις πιθανότητες λήψης συμβόλων.

β') Δεδομένου ότι ελήφθη το σύμβολο ?, ποια είναι η πιθανότητα να εστάλη 0 και ποια να εστάλη 1;



Σχήμα 1: Δυαδικό Κανάλι με Διαγραφές

γ') Έστω ότι λάβαμε την ακολουθία 1??. Βρείτε τις πιθανότητες για όλους τους πιθανούς συνδυασμούς ακολουθιών στην είσοδο για αυτήν την έξοδο. Ποια είναι η πιο πιθανή είσοδος;

Άσκηση 3

Μας δίνονται δύο 'πειραγμένα' νομίσματα εκ των οποίων το ένα φέρνει κεφαλή με πιθανότητα $1/4$ και το άλλο φέρνει κεφαλή με πιθανότητα $3/4$. Τα δύο νομίσματα φαίνονται να είναι πανομοιότυπα: δεν μπορούμε να τα ξεχωρίσουμε εξ όψεως. Ρίχνουμε τα δύο νομίσματα από μία φορά το καθένα διαλέγοντας στην τύχη (με πιθανότητα $1/2$) ποιο θα ρίξουμε πρώτο. Ορίζουμε τα γεγονότα: $H_i = \{ \text{η } i\text{-στή ρίψη φέρνει κεφαλή} \}$, $i = 1, 2$.

α') Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(H_1)$ και $P(H_2)$.

β') Υπολογίστε την πιθανότητα ότι και οι δύο ρίψεις φέρνουν κεφαλή, δηλαδή $P(H_1 \cap H_2)$.

γ') Είναι τα γεγονότα H_1 και H_2 ανεξάρτητα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 4

Τρεις φίλοι, ο Κώστας, ο Γιώργος και ο Παύλος, αποφασίζουν να παίξουν ένα μικρό πρωτάθλημα στο μονό μπάσκετ. Το παιχνίδι έχει ως εξής. Στην πρώτη φάση του παιχνιδιού, παίζει ο Κώστας με τον Γιώργο και ο νικητής παίζει με τον Παύλο. Στην δεύτερη φάση παίζουν οι χαμένοι και ο νικητής παίζει με τον νικητή της πρώτης φάσης. Αν τους νικήσει ξανά, το πρωτάθλημα λήγει και ανακηρύσσεται νικητής. Αλλιώς, ξαναπαίζεται άλλος ένας γύρος όπου το πρωτάθλημα επαναλαμβάνεται. Αυτό συνεχίζεται ως ώτου έχουμε κάποιον νικητή.

Υποθέστε ότι ο νικητής της πρώτης φάσης του πρώτου γύρου είναι ο Παύλος. Επομένως, στην δεύτερη φάση θα παίξουν ο Κώστας και ο Γιώργος και ο νικητής θα παίζει με τον Παύλο ξανά. Υποθέστε ότι όλα τα παιχνίδια είναι ανεξάρτητα.

Από την εμπειρία των μεταξύ τους παιχνιδιών ξέρουμε ότι:

- Η πιθανότητα ο Κώστας να κερδίσει τον Γιώργο σε κάποιο παιχνίδι είναι 0.6.
- Η πιθανότητα ο Παύλος να κερδίσει τον Κώστα σε κάποιο παιχνίδι είναι 0.5.
- Η πιθανότητα ο Παύλος να κερδίσει τον Γιώργο σε κάποιο παιχνίδι είναι 0.7

α') Βρείτε τις εκ των προτέρων πιθανότητες των παρακάτω γεγονότων.

- i. Ο Κώστας είναι ο νικητής του πρώτου γύρου, δηλ. νικάει και τον Γιώργο και τον Παύλο.
- ii. Να χρειαστεί να παιχτεί δεύτερος γύρος.
- iii. Ο Παύλος είναι ο τελικός νικητής από τον πρώτο γύρο.

β') Δεδομένου ότι χρειάζεται να γίνει και ο δεύτερος γύρος, βρείτε τις δεσμευμένες πιθανότητες των παρακάτω γεγονότων.

- i. Ο Κώστας είναι ο νικητής του πρώτου γύρου.
 - ii. Ο Γιώργος είναι ο νικητής του πρώτου γύρου.
 - iii. Ο Παύλος είναι ο νικητής του πρώτου γύρου.
- γ') Είναι ανεξάρτητα τα ενδεχόμενα να παιχτεί δεύτερος γύρος και
- i. να νικήσει ο Παύλος στον πρώτο γύρο;
 - ii. να νικήσει ο Κώστας στον πρώτο γύρο;

Άσκηση 5

Μία ασφαλιστική εταιρεία κατατάσσει τους ανθρώπους σε 3 κατηγορίες, ανάλογα με την επικινδυνότητά τους στην οδήγηση: κατηγορία μικρού, μέτριου και μεγάλου ρίσκου. Τα αρχεία της εταιρείας δείχνουν ότι οι πιθανότητες οι πελάτες μικρού, μέσου και μεγάλου ρίσκου να έχουν ατύχημα κατά τη διάρκεια ενός έτους είναι 0.05, 0.2 και 0.3 αντίστοιχα.

- α') Αν το 10% του πληθυσμού αποτελείται από άτομα μικρού ρίσκου, το 50% από άτομα μέτριου ρίσκου και το υπόλοιπο 40% από άτομα μεγάλου ρίσκου, να υπολογιστεί το ποσοστό του πληθυσμού που δεν έχει κανένα ατύχημα κατά τη διάρκεια ενός έτους.
- β') Αν κάποιος ασφαλισμένος είχε τουλάχιστον ένα ατύχημα κάποιο έτος, να υπολογιστούν οι πιθανότητες να είναι άτομο:
- i. Μικρού ρίσκου
 - ii. Μέτριου ρίσκου
 - iii. Μεγάλου ρίσκου