

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2023-2024
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

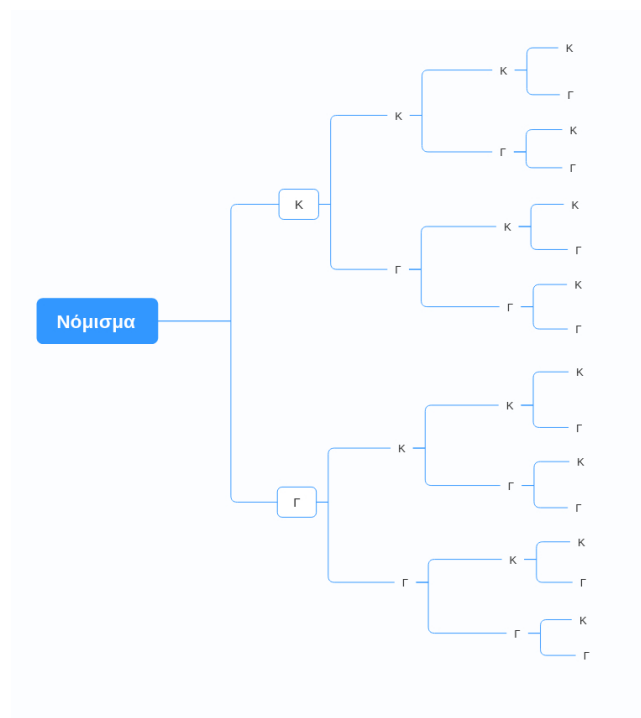
Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1

Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι ο εξής:

$$\Omega = \{\text{KKKK}, \text{KKKT}, \text{KKTK}, \text{KKTG}, \text{KTKK}, \text{KTGT}, \text{KTGK}, \text{KTGG}, \text{TKKK}, \text{TKKT}, \text{TKGK}, \text{TKGT}, \text{TTKK}, \text{TTKT}, \text{TTGK}, \text{TTGG}\}$$

Το δενδρικό διάγραμμα είναι το ακόλουθο:



Τα γεγονότα αναπαρίστανται ως:

$$A = \{ K\Gamma\Gamma, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma \}$$
$$B = \{ KK\Gamma\Gamma, K\Gamma K\Gamma, K\Gamma\Gamma K, \Gamma K K\Gamma, \Gamma K\Gamma K, \Gamma\Gamma K K \}$$
$$C = \{ \text{KKK}\Gamma, \text{KK}\Gamma\text{K}, \text{K}\Gamma\text{KK}, \Gamma\text{KKK} \}$$
$$(\alpha) A \cap B \cap C = \{ \text{KFTT, FTKF, FTKF, TTFK} \} \cap \{ \text{KKFT, KFKF, KFTK, FKFK, FKFK, FTKK} \} \cap \{ \text{KKKF, KFKK, KFKK, FKKK} \} = \emptyset$$

(β) $A \cup B = \{ \text{KTTT, TKT T, TTKT, TTTK, KTKT, KTKT, KTKT, TTKT, TTKT, TTKT} \}$

$$(\gamma) (A \cup B) \cap C = \{ \text{KFTT, FTFT, FTFT, FTFT, KFTT, KFTT, KFTT, FTFT, FTFT, FTFT} \} \cap C = \{ \text{KFTT, FTFT, FTFT, FTFT, KFTT, KFTT, KFTT, FTFT, FTFT, FTFT} \} \cap \{ \text{KFTT, KFTT, KFTT, FTFT, FTFT, FTFT} \} = \emptyset$$

Για το (δ) χρειαζόμαστε τα εξής:

$$A^c = \{ \text{ΚΓΓΓ, ΓΚΓΓ, ΓΓΚΓ, ΓΓΓΚ} \} = \{ \text{ΚΚΚΚ, ΚΚΚΓ, ΚΚΓΚ, ΚΚΓΓ, ΚΓΚΚ, ΚΓΚΓ, ΚΓΓΚ, ΓΚΚΚ, ΓΚΚΓ, ΓΚΓΚ, ΓΓΚΚ, ΓΓΓΓ} \}$$

$$C^c = \{ \text{ΚΚΚΓ, ΚΚΓΚ, ΚΓΚΚ, ΓΚΚΚ} \} = \{ \text{ΚΚΚΚ, ΚΚΓΓ, ΚΓΚΓ, ΚΓΓΚ, ΚΓΓΓ, ΓΚΚΓ, ΓΚΓΚ, ΓΚΓΓ, ΓΓΚΚ, ΓΓΚΓ, ΓΓΓΚ, ΓΓΓΓ} \}$$

$$(A \cap C^c) = \{ \text{ΚΓΓΓ, ΓΚΓΓ, ΓΓΚΓ, ΓΓΓΚ} \} \cap \{ \text{ΚΚΚΚ, ΚΚΓΓ, ΚΓΚΓ, ΚΓΓΚ, ΚΓΓΓ, ΓΚΚΓ, ΓΚΓΚ, ΓΚΓΓ, ΓΓΚΚ, ΓΓΚΓ, ΓΓΓΚ, ΓΓΓΓ} \} = \{ \text{ΚΓΓΓ, ΓΚΓΓ, ΓΓΚΓ, ΓΓΓΚ} \} = A$$

$$(B \cap A^c) = \{ \text{ΚΚΓΓ, ΚΓΚΓ, ΚΓΓΚ, ΓΚΚΓ, ΓΚΓΚ, ΓΓΚΚ} \} \cup \{ \text{ΚΚΚΚ, ΚΚΚΓ, ΚΚΓΚ, ΚΚΓΓ, ΚΓΚΚ, ΚΓΚΓ, ΚΓΓΚ, ΓΚΚΚ, ΓΚΚΓ, ΓΚΓΚ, ΓΓΚΚ, ΓΓΓΓ} \} = \{ \text{ΚΚΓΓ, ΚΓΚΓ, ΚΓΓΚ, ΓΚΚΓ, ΓΚΓΚ, ΓΓΚΚ} \} = B$$

$$(\delta) (A \cap C^c) \cup (B \cap A^c) = A \cup B = \{ \text{ΚΓΓΓ, ΓΚΓΓ, ΓΓΚΓ, ΓΓΓΚ, ΚΚΓΓ, ΚΓΚΓ, ΚΓΓΚ, ΓΚΚΓ, ΓΚΓΚ, ΓΓΚΚ} \}$$

Άσκηση 2

(α) Η πιθανότητα να επιλέξουμε τον σπόρο λουλούδι είναι ο λόγος του αριθμού των σπόρων λουλούδι προς τον συνολικό αριθμό των σπόρων:

$$P(\text{λουλούδι}) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

$$(\beta) \text{ Η πιθανότητα να μην επιλέξουμε τον σπόρο δέντρο} = P(\Omega) - P(\text{δέντρο}) = 1 - \frac{10}{60} = \frac{5}{6}$$

(γ) Η πιθανότητα να πετύχουμε σπόρο που είναι είτε λαχανικό είτε λουλούδι = $P(\text{λαχανικό ή λουλούδι}) =$

$$P(\text{λαχανικό} \cup \text{λουλούδι}) = P(\text{λαχανικό}) + P(\text{λουλούδι}) = \frac{30}{60} + \frac{20}{60} = \frac{5}{6}$$

(δ) Η πιθανότητα να πετύχουμε σπόρο που είναι είτε λαχανικό είτε λουλούδι και όχι δέντρο = $P(\text{λαχανικό ή λουλούδι}) = \frac{5}{6}$

Άσκηση 3

Η εκφώνηση μας δίνει πληροφορία για τους πληθαισμούς των εξής γεγονότων: $|\Pi| = 300$, $|\Phi| = 200$, $|M| = 150$, $|M \cap \Phi \cap \Pi^c| = 80$, $|M^c \cap \Phi \cap \Pi| = 60$, $|M \cap \Phi^c \cap \Pi| = 40$ και $|M \cap \Phi \cap \Pi| = 30$, όπου π.χ. Π είναι το γεγονός ένας τυχαία επιλεγμένος φοιτητής να σπουδάζει Πληροφορική. Στη συνέχεια, ζωγραφίστε ένα διάγραμμα Venn για να σας βοηθήσει να οπτικοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα καθώς και τα ερωτήματα και τις λύσεις που ακολουθούν.

(α) Η πιθανότητα να επιλέξουμε έναν φοιτητή που σπουδάζει τουλάχιστον ένα από τα τρία επιστημονικά πεδία είναι 1 μείον την πιθανότητα ο φοιτητής να μην σπουδάζει κανένα πεδίο, άρα 1.

(β) Μας ζητείται ο πληθαισμός του σύνθετου γεγονότος $(M \cap \Phi \cap \Pi^c) \cup (M^c \cap \Phi \cap \Pi) \cup (M \cap \Phi^c \cap \Pi)$. Καθώς τα τρία σύνολα στην ένωση είναι ξένα μεταξύ τους, ο πληθαισμός της ένωσης ισούται με το άθροισμα των επιμέρους πληθαισμών. Επομένως η απάντηση είναι $80+60+40=180$ φοιτητές.

(γ) Μας ζητείται η πιθανότητα του γεγονότος $M \cap (\Phi \cup \Pi)^c$. Αλλά $M \cap (\Phi \cup \Pi)^c = M \cap \Phi^c \cap \Pi^c$. Από ένα απλό διάγραμμα Venn, μπορούμε να δούμε ότι το γεγονός M μπορεί να εκφραστεί ως η ένωση των εξής ξένων μεταξύ τους γεγονότων:

$$M = (M \cap \Phi^c \cap \Pi^c) \cup (M \cap \Phi \cap \Pi^c) \cup (M \cap \Phi^c \cap \Pi) \cup (M \cap \Phi \cap \Pi).$$

Καθώς τα τέσσερα γεγονότα είναι ξένα, ο πληθαισμός του M ισούται με το άθροισμα των τεσσάρων πληθαισμών. Επομένως έχουμε ότι:

$$150 = |M \cap \Phi^c \cap \Pi^c| + 80 + 40 + 30.$$

Συνεπώς, $|M \cap \Phi^c \cap \Pi^c| = 0$ και η πιθανότητα του γεγονότος $M \cap (\Phi \cup \Pi)^c$ είναι 0.

(δ) Μας ζητείται η δεσμευμένη πιθανότητα $P(M \cap \Pi | M)$. Προφανώς

$$P(M \cap \Pi | M) = \frac{P(M \cap \Pi)}{P(M)} = \frac{|M \cap \Pi|}{|M|}.$$

Έχουμε ότι $|M \cap \Pi| = |M \cap \Pi \cap \Phi| + |M \cap \Pi \cap \Phi^c| = 40 + 30 = 70$. Συνεπώς

$$P(M \cap \Pi | M) = \frac{70}{150} = \frac{7}{15} = 0.4667.$$

Άσκηση 4

Η πιθανότητα του δειγματικού χώρου του πειράματος είναι: $P(\Omega) = \frac{x}{8} + \frac{1}{x+2}$. Οπότε:

$$P(M) = \frac{\frac{x}{8}}{\frac{x}{8} + \frac{1}{x+2}} = \frac{x(x+2)}{x^2+2x+8}$$

$$P(A) = \frac{\frac{1}{x+2}}{\frac{x}{8} + \frac{1}{x+2}} = \frac{8}{x^2+2x+8}$$

(β) Η πιθανότητα να επιλεγεί ένα αχλάδι είναι $8/3$ μεγαλύτερη από την πιθανότητα να επιλεγεί ένα μήλο.

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{8}{3} P(M) \Rightarrow \\ \frac{8}{x^2+2x+8} &= \frac{8}{3} \frac{x(x+2)}{x^2+2x+8} \Rightarrow \\ \frac{8}{3} x(x+2) &= 8 \Rightarrow \\ 8x^2 + 16x - 24 &= 0 \Rightarrow \\ x^2 + 2x - 3 &= 0 \Rightarrow \\ x^2 + 2x + 1 &= 4 \Rightarrow \\ (x+1)^2 &= |4| \Rightarrow \\ x+1 &= |2| \Rightarrow \end{aligned}$$

Οι δύο λύσεις είναι: $x_1 = 1$ και $x_2 = -3$ (απορρίπτεται). Η αποδεκτή λύση είναι: $x = 1$.

Για $x = 1$, η πιθανότητα να επιλέξει αχλάδι είναι: $P(A) = \frac{8}{x^2+2x+8} = \frac{8}{11}$.

(γ) Η πιθανότητα να επιλεγεί ένα μήλο σε μια μοναδική επιλογή είναι $\frac{3}{11}$.

Για την επανατοποθέτηση, η πιθανότητα να επιλεγεί ένα μήλο σε κάθε επιλογή παραμένει $\frac{3}{11}$, καθώς το κάθε μήλο επιστρέφει στο κατάστημα, άρα η πιθανότητα είναι: $\left(\frac{3}{11}\right)^5$.

Άσκηση 5

(α) Το γεγονός A περιέχει τα εξής δειγματοσημεία: $A = \{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$. Ο δειγματοχώρος Ω περιέχει τα 36 διατεταγμένα ζεύγη από $(1, 1)$ έως $(6, 6)$. Επομένως, $P(A) = \frac{6}{36}$.

(β) Το γεγονός B περιέχει τα εξής δειγματοσημεία: $B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (5, 2), (5, 4), (5, 6)\}$. Επομένως, $P(B) = \frac{9}{36}$.

(γ) Έχουμε ότι $A \cap B = \{(1, 6), (3, 4), (5, 2)\}$. Συνεπώς

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{36} + \frac{9}{36} - \frac{3}{36} = \frac{12}{36}.$$

(δ) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{6}{36} - \frac{3}{36} = \frac{3}{36}$.

(ε) Τα διατεταγμένα ζεύγη ώστε να έχουμε άθροισμα μικρότερο από 4 είναι τρία το πλήθος, τα εξής: $(1, 1), (1, 2), (2, 1)$. Τα διατεταγμένα ζεύγη για να έχουμε άθροισμα μεγαλύτερο του 8 είναι δέκα το πλήθος, τα εξής: $(3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)$. Συνεπάγεται ότι η πιθανότητα είναι: $\frac{13}{36}$.

(ζ) Έστω C το γεγονός το άθροισμα των δύο ρίψεων είναι άρτιος και D το γεγονός η δεύτερη ρίψη έφερε άρτιο. Προφανώς $C \cap D$ είναι το γεγονός και οι δύο ρίψεις έφεραν άρτιο. Έχουμε ότι

$$C = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), \dots (6, 4), (6, 6)\}$$

με $|C| = 18$. Επίσης,

$$D = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 2), \dots (6, 4), (6, 6)\}$$

με $|D| = 18$. Τέλος,

$$C \cap D = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), \dots (6, 4), (6, 6)\}$$

με $|C \cap D| = 9$. Συνεπώς,

$$P(C | D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{|C \cap D|/|\Omega|}{|D|/|\Omega|} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}.$$