

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Πρόοδος
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
3 Δεκεμβρίου 2022 - Διάρκεια: 2.5 Ώρες

Θέμα 1 - 20 μονάδες. Βασικές Έννοιες

(α) Να βρεθεί η δεσμευμένη πιθανότητα $P(A|B)$ όταν: (i) $A \cap B = \emptyset$, (ii) $A \subseteq B$ και (iii) $B \subseteq A$.

(β) Ναδειχθεί ότι αν $P(A|B) > P(A)$, τότε $P(B|A) > P(B)$.

(γ) Έστω τα γεγονότα A και B ενός πειράματος τύχης. Αν η πιθανότητα ότι τουλάχιστον ένα από τα δύο γεγονότα συνέβη είναι 0.6 και η πιθανότητα ότι τουλάχιστον ένα από τα δύο γεγονότα **δεν** συνέβη είναι 0.8, υπολογίστε την πιθανότητα ότι ακριβώς ένα από τα δύο γεγονότα **δεν** συνέβη.

Θέμα 2 - 20 μονάδες. Συνδυαστική

Σε ένα δοχείο υπάρχουν 6 άσπρες και 5 μαύρες μπάλες. Παίρνουμε τυχαία ένα δείγμα μεγέθους 4 χωρίς επανάθεση. Ποια η πιθανότητα

(α) Να πάρουμε ακριβώς k άσπρες όπου $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

(β) Να πάρουμε τουλάχιστον 1 άσπρη.

(γ) Να πάρουμε 3 άσπρες και 1 μαύρη δεδομένου ότι γνωρίζουμε ότι πήραμε τουλάχιστον 1 άσπρη.

(δ) Να πάρουμε τουλάχιστον "1 άσπρη και 2 μαύρες".

(ε) Είναι τα γεγονότα A και B ανεξάρτητα, όπου $A = \{\text{τουλάχιστον 1 άσπρη}\}$ και $B = \{\text{τουλάχιστον 1 άσπρη και 2 μαύρες}\}$.

Θέμα 3 - 20 μονάδες. Πολλαπλασιαστικός νόμος, ολική πιθανότητα και Bayes

Μία ασφαλιστική εταιρία κατηγοριοποιεί τους πελάτες της σε τρεις κατηγορίες: χαμηλού, μέσου και υψηλού κινδύνου. Οι μελέτες της δείχνουν ότι οι πιθανότητες των πελατών χαμηλού, μέσου και υψηλού κινδύνου να εμπλακούν σε δυστύχημα στη διάρκεια ενός έτους είναι 0.05, 0.15 και 0.30, αντίστοιχα.

(α) Εάν το 20% του πληθυσμού είναι χαμηλού, 50% είναι μέσου και 30% είναι υψηλού κινδύνου, ποιο είναι το ποσοστό του πληθυσμού που έχει δυστύχημα στη διάρκεια ενός έτους;

(β) Εάν ο πελάτης της ασφαλιστικής εταιρίας **δεν** είχε κανένα δυστύχημα κατά τη διάρκεια του έτους, ποια η πιθανότητα ότι είναι μέσου κινδύνου;

Θέμα 4 - 20 μονάδες. Δοκιμές Bernoulli

Στο χρηματιστήριο, κάθε μέρα η τιμή μίας μετοχής αυξάνεται κατά 1 ευρώ με πιθανότητα 14%, αλλιώς μένει σταθερή και οι αλλαγές αυτές είναι ανεξάρτητες από τη μία μέρα στην άλλη. Έστω ότι το πρωί της πρώτης μέρας η τιμή είναι 100 ευρώ. Έστω X_1 η μεταβολή της τιμής κατά την πρώτη μέρα, X_2 η μεταβολή της τιμής κατά τη δεύτερη μέρα και γενικά X_i η μεταβολή της τιμής κατά την i -στή μέρα.

- (α) Ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) των τυχαίων μεταβλητών X_i ;
- (β) Έστω X η συνολική διαφορά της τιμής μετά από 30 ημέρες. Ποια η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X ;
- (γ) Ποια η πιθανότητα ότι μετά από 30 ημέρες η τιμή της μετοχής θα είναι μεταξύ 110 και 112 ευρώ (συμπεριλαμβανομένων);
- (δ) Αν Y είναι η τιμή της μετοχής μετά από 60 ημέρες, να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά της.
- (ε) Αν η τιμή της μετοχής αυξανόταν κατά 1 ευρώ με πιθανότητα 14%, αλλιώς **μειωνόταν** κατά 0.5 ευρώ, ποια θα ήταν η τιμή της, Z , μετά από 60 ημέρες; Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας, μέση τιμή και διασπορά της τ.μ. Z .

Θέμα 5 - 20 μονάδες. Από κοινού κατανομές

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y . Ο πίνακας δίνει μερική πληροφορία για την από κοινού σ.π. $p_{X,Y}(x,y)$ και τις περιθωριακές σ.π. $p_X(x)$ και $p_Y(y)$ των τ.μ. X και Y , αντίστοιχα.

		X				$p_Y(y)$
		$x = -5$	$x = -2$	$x = 2$	$x = 5$	
Y	$y = 0$	0.01	0.01	0.01	?	?
	$y = 1$	0.05	?	0.05	0	0.19
	$y = 2$	0.07	0.07	?	0.07	?
	$y = 3$	0.15	?	0	0.15	?
$p_X(x)$		?	0.26	0.15	?	

- (α) Συμπληρώστε τις τιμές που λείπουν στον πίνακα δίνοντας μία συνοπτική αιτιολόγηση για τα βήματά σας από τιμή σε τιμή.
- (β) Υπολογίστε την πιθανότητα η τ.μ. X να παίρνει τιμές μικρότερες ή ίσες από την τ.μ. Y .
- (γ) Είναι οι τ.μ. X και Y ανεξάρτητες ή όχι; Αποδείξτε την απάντησή σας.
- (δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Y = 1 | X = 2)$.
- (ε) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(Y \text{ είναι περιττός} | X \text{ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του } 5)$.
- (στ) Έστω $Z = 2X - Y^3$. Βρείτε τη μέση τιμή, $E[Z]$, της τ.μ. Z .