

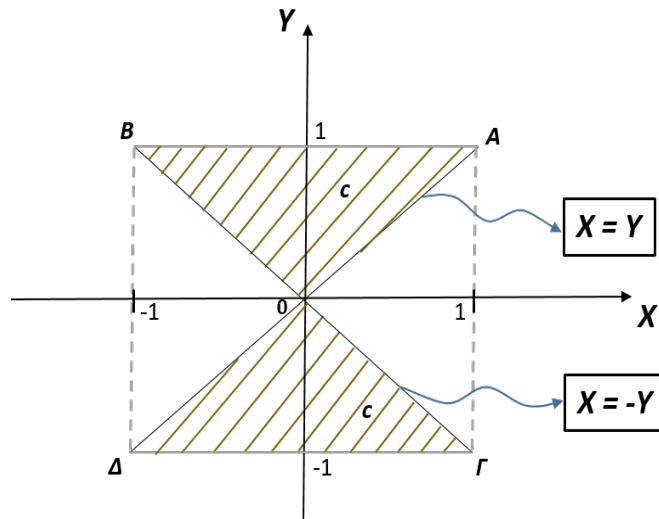
Άσκηση 1 Οι συνεχείς Τ.Μ. X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον εξής τύπο:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} c & 0 \leq |x| \leq |y|, 0 \leq |y| \leq 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- (i) Δώστε τη γραφική παράσταση της από κοινού σ.π.π. και υπολογίστε την σταθερά c .
- (ii) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π.π. της Τ.Μ. X , $f_X(x)$.
- (iii) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X^2 + Y^2 \leq 1)$.

Λύση:

- (i) Η γραφική παράσταση της από κοινού σ.π.π. των X, Y φαίνεται στο Σχήμα 1:



Σχήμα 1: Η ζητούμενη γραφική παράσταση στο ερώτημα 1 (α).

Το πεδίο τιμών των (X, Y) είναι τα γραμμοσκιασμένα τρίγωνα OAB και OΓΔ όπου η $f_{X,Y}(x, y)$ παίρνει τιμή c . Πρέπει:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1 \Rightarrow c \cdot E_{OAB} + c \cdot E_{O\Gamma\Delta} = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

- (ii) Προφανώς, $-1 \leq x \leq 1$ είναι το πεδίο τιμών της τ.μ. X .

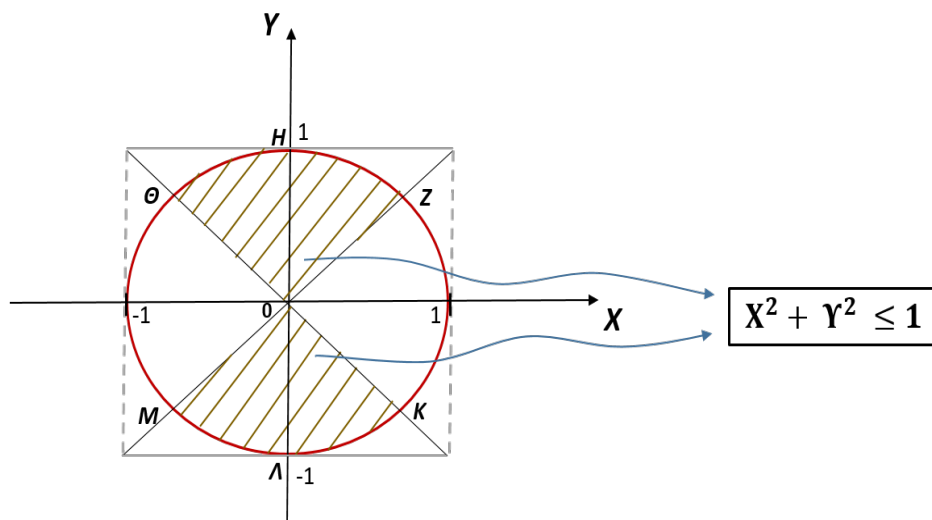
- Για $-1 \leq x \leq 0$: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = \int_{y=-1}^x c dy + \int_{y=-x}^1 c dy = 1 + x$
- Για $0 \leq x \leq 1$: $f_X(x) = \int_{y=-1}^{-x} c dy + \int_{y=x}^1 c dy = 1 - x$

Άρα:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = 1-|x|, \quad |x| \leq 1$$

(iii) Με τη βοήθεια του Σχήματος 2 έχουμε:

$$P(X^2+Y^2 \leq 1) = c \cdot E_{OZ\Theta\eta} + c \cdot E_{OK\Lambda\mu} = c \cdot (\text{Εμβαδόν μισού κύκλου ακτίνας 1}) = c \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{4}$$



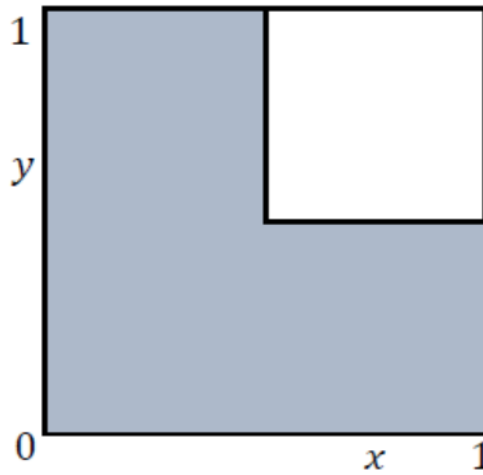
Σχήμα 2: Η ζητούμενη γραφική παράσταση στο ερώτημα 1 (γ).

Άσκηση 2 Δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{c}{(x+1)^2(y+1)^2}, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \min\{x,y\} < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- (i) Να σχεδιάσετε το επίπεδο (x,y) και να προσδιορίσετε την περιοχή στην οποία ισχύει $f_{XY}(x,y) \neq 0$.
- (ii) Να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς c .
- (iii) Να υπολογίσετε την οριακή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_Y(y)$ και τη μέση τιμή της τ.μ. Y .
- (iv) Να υπολογίσετε την υπό συνθήκη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y , $f_{Y|X}(y|\alpha)$, δεδομένου ότι $X = \alpha$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.
- (v) Να υπολογίσετε την υπό συνθήκη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y , $f_{Y|X}(y|\beta)$, δεδομένου ότι $X = \beta$, $\frac{1}{2} < \beta < 1$.

Λύση:



Σχήμα 3: Η ζητούμενη γραφική παράσταση στο ερώτημα (i).

(i)

$$(x < \frac{1}{2} \wedge y < \frac{1}{2}) \vee (x < \frac{1}{2} \wedge y \geq \frac{1}{2}) \vee (x \geq \frac{1}{2} \wedge y < \frac{1}{2})$$

(ii) Πρέπει να ισχύει

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx dy &= 1 \Rightarrow \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{(x+1)^2(y+1)^2} dx dy &= 1 \Rightarrow \\ \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{c}{(x+1)^2(y+1)^2} dx dy + \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{c}{(x+1)^2(y+1)^2} dx dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{c}{(x+1)^2(y+1)^2} dx dy &= 1 \Rightarrow \\ c \left(\left[-\frac{1}{x+1} \right]_0^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{1}{y+1} \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[-\frac{1}{x+1} \right]_{\frac{1}{2}}^1 \left[-\frac{1}{y+1} \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[-\frac{1}{x+1} \right]_0^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{1}{y+1} \right]_{\frac{1}{2}}^1 \right) &= 1 \Rightarrow \\ c \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} \right) &= 1 \Rightarrow \\ c &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx \\ &= \begin{cases} \int_0^1 \frac{9}{2} \frac{1}{(x+1)^2(y+1)^2} dx, & y < \frac{1}{2} \\ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{9}{2} \frac{1}{(x+1)^2(y+1)^2} dx, & y \geq \frac{1}{2} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{9}{2(y+1)^2} \left[-\frac{1}{(x+1)} \right]_0^1, & y < \frac{1}{2} \\ \frac{9}{2(y+1)^2} \left[-\frac{1}{(x+1)} \right]_0^{\frac{1}{2}}, & y \geq \frac{1}{2} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{9}{4(y+1)^2}, & 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2(y+1)^2}, & \frac{1}{2} \leq y < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{9}{4(y+1)^2}, & 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2(y+1)^2}, & \frac{1}{2} \leq y < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} y \frac{9}{4(y+1)^2} dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 y \frac{3}{2(y+1)^2} dy \\ &= -1 + \frac{3 \log(6)}{4}. \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^1 \frac{9}{2} \frac{1}{(x+1)^2 (y+1)^2} dy, & x < \frac{1}{2} \\ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{9}{2} \frac{1}{(x+1)^2 (y+1)^2} dy, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{9}{2(x+1)^2} \left[-\frac{1}{y+1} \right]_0^1, & x < \frac{1}{2} \\ \frac{9}{2(x+1)^2} \left[-\frac{1}{y+1} \right]_0^{\frac{1}{2}}, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{9}{4(x+1)^2}, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2(x+1)^2}, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{9}{4(x+1)^2}, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2(x+1)^2}, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Για $x = \alpha$, $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$,

$$f_{Y|X}(y|\alpha) = \frac{f_{X,Y}(\alpha, y)}{f_X(\alpha)} = \begin{cases} \frac{\frac{9}{2} \frac{1}{(\alpha+1)^2 (y+1)^2}}{\frac{9}{4(\alpha+1)^2}}, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{(y+1)^2}, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(v) Για $x = \beta$, $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$,

$$f_{Y|X}(y|\beta) = \frac{f_{X,Y}(\beta, y)}{f_X(\beta)} = \begin{cases} \frac{\frac{9}{2} \frac{1}{(\beta+1)^2 (y+1)^2}}{\frac{3}{2(\beta+1)^2}}, & 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{(y+1)^2}, & 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άσκηση 3 Οι τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι ανεξάρτητες με πυκνότητες

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \mu e^{-\mu y}, & y > 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Να βρεθεί η πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής $Z = \frac{X}{Y}$.

Λύση:

- (i) Οι τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες, συνεπώς η κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} \lambda \mu e^{-\lambda x - \mu y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Για $z > 0$,

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P\left(\frac{X}{Y} \leq z\right) = P(X \leq zY) = \int_{y=0}^{\infty} \int_{x=0}^{zy} \lambda \mu e^{-\lambda x - \mu y} dx dy \\ &= \int_{y=0}^{\infty} \mu e^{-\mu y} \int_{x=0}^{zy} \lambda e^{-\lambda x} dx dy \\ &= \int_{y=0}^{\infty} \mu e^{-\mu y} \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{zy} dy \\ &= \int_{y=0}^{\infty} \mu e^{-\mu y} (1 - e^{-\lambda zy}) dy \\ &= \int_{y=0}^{\infty} \mu e^{-\mu y} dy - \int_{y=0}^{\infty} \mu e^{-\mu y - \lambda zy} dy \\ &= 1 + \frac{\mu}{\mu + \lambda z} \left[e^{-(\mu + \lambda z)y}\right]_0^{\infty} \\ &= 1 - \frac{\mu}{\mu + \lambda z} \\ &= \frac{\lambda z}{\mu + \lambda z}. \end{aligned}$$

Οπότε,

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ \frac{\lambda z}{\mu + \lambda z}, & z > 0 \end{cases}$$

Άρα, για $z > 0$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \frac{d}{dz} \frac{\lambda z}{\mu + \lambda z} = \frac{\mu \lambda}{(\mu + \lambda z)^2}.$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{\mu \lambda}{(\mu + \lambda z)^2}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$

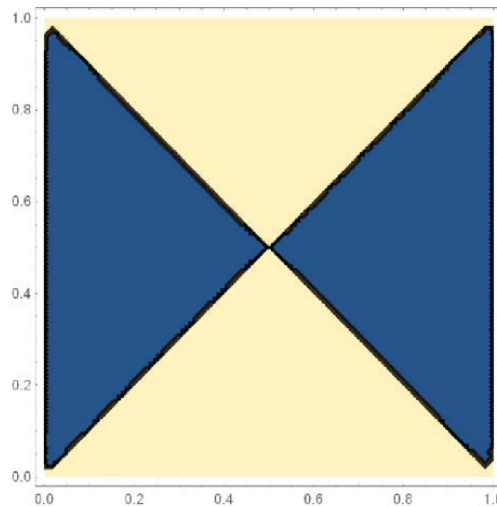
Άσκηση 4 Δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} c, & \min(x, 1-x) < y < \max(x, 1-x), \quad 0 < x < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- (i) Να σχεδιάσετε το επίπεδο (x, y) και να προσδιορίσετε την περιοχή στην οποία ισχύει $f_{XY}(x, y) \neq 0$.
- (ii) Να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς c .
- (iii) Να υπολογίσετε οριακή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_Y(y)$ και τη μέση τιμή $E[Y]$ της τυχαίας μεταβλητής Y .

Λύση:

- (i) Η ζητούμενη περιοχή βρίσκεται στα γραμμοσκιασμένα τρίγωνα του σχήματος 4.

Σχήμα 4: Επίπεδο (x, y)

- (ii)

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx dy &= 1 \Rightarrow \\
 c \int_0^{\frac{1}{2}} \int_x^{1-x} dy dx + c \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{1-x}^x dy dx &= 1 \Rightarrow \\
 c \int_0^{\frac{1}{2}} [y]_x^{1-x} dx + c \int_{\frac{1}{2}}^1 [y]_{1-x}^x dx &= 1 \Rightarrow \\
 c \int_0^{\frac{1}{2}} 1 - 2x dx + c \int_{\frac{1}{2}}^1 2x - 1 dx &= 1 \Rightarrow \\
 c [x - x^2]_0^{\frac{1}{2}} + c [x^2 - x]_{\frac{1}{2}}^1 &= 1 \Rightarrow \\
 \frac{c}{2} &= 1 \Rightarrow \\
 c &= 2
 \end{aligned}$$

Άρα

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 2, & \min(x, 1-x) < y < \max(x, 1-x), \quad 0 < x < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- (iii) Για $y \leq \frac{1}{2}$,

$$f_Y(y) = \int_0^1 f_{XY}(x, y) dx = \int_0^y 2 dx + \int_{1-y}^1 2 dx = 2y + 2 - 2(1-y) = 4y.$$

Για $\frac{1}{2} < y < 1$,

$$f_Y(y) = \int_0^1 f_{XY}(x, y) dx = \int_0^{1-y} 2 dx + \int_y^1 2 dx = 2(1-y) + 2(1-y) = 4-4y.$$

Οπότε

$$f_Y(y) = \begin{cases} 4y, & 0 < y \leq \frac{1}{2} \\ 4-4y, & \frac{1}{2} < y < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^{\frac{1}{2}} y 4y dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 y (4-4y) dy \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} 4y^2 dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 (4y - 4y^2) dy \\ &= \left[\frac{4}{3} y^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[2y^2 - \frac{4}{3} y^3 \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \left(\frac{1}{6} - 0 \right) + \left(2 - \frac{4}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Άσκηση 5 Έστω X και Y τ.μ. με $E[X] = 1$, $E[Y] = 4$, $\text{var}(X) = 4$, $\text{var}(Y) = 9$, και συντελεστή συσχέτισης $\rho_{X,Y} = 0.1$.

- (i) Αν $Z = 2(X + Y)(X - Y)$, βρείτε την $E[Z]$.
- (ii) Αν $T = 2X + Y$ και $U = 2X - Y$, βρείτε την συνδιασπορά των τ.μ. T και U , $\text{cov}(T, U)$.
- (iii) Αν $W = 3X + Y + 2$, βρείτε τις $E[W]$ και $\text{var}(W)$.

Λύση:

- (i) Αφού $Z = 2(X + Y)(X - Y) = 2(X^2 - Y^2)$, θα έχουμε:

$$E[Z] = 2(E[X^2] - E[Y^2]) = 2(\text{Var}(X) + E^2[X] - \text{Var}(Y) - E^2[Y]) = 2(4 + 1 - 9 - 4^2) = -40$$

- (ii) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(T, U) &= \text{Cov}(2X + Y, 2X - Y) = E[(2X + Y)(2X - Y)] - E[2X + Y]E[2X - Y] \\ &= E[4X^2 - Y^2] - (2E[X] + E[Y])(2E[X] - E[Y]) \\ &= 4E[X^2] - E[Y^2] - 4(E[X])^2 + 2E[X]E[Y] - 2E[X]E[Y] + (E[Y])^2 \\ &= 4(E[X^2] - (E[X])^2) - (E[Y^2] - (E[Y])^2) = 4\text{Var}(X) - \text{Var}(Y) = 4 \cdot 4 - 9 = 7 \end{aligned}$$

- (iii) Είναι:

$$\begin{aligned} E[W] &= E[3X + Y + 2] = 3E[X] + E[Y] + 2 = 3 \cdot 1 + 4 + 2 = 9 \\ \text{Var}(W) &= \text{Var}(3X + Y + 2) = 9\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 6\text{Cov}(X, Y) = 48.6 \end{aligned}$$

$$\text{όπου } \text{Cov}(X, Y) = \rho \sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)} = 0.1 \sqrt{4 \cdot 9} = 0.6.$$

Άσκηση 6 Έστω Y συνεχής Τ.Μ. με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 1]$. Δεδομένης της τιμής $Y = y$, η Τ.Μ. X είναι υπό συνθήκη ομοιόμορφη στο διάστημα $[0, 1 + y]$.

- (i) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της Τ.Μ. X , $E[X]$.
- (ii) Να προσδιορίσετε την από κοινού Σ.Π.Π. των X, Y , $f_{XY}(x, y)$.
- (iii) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του γεγονότος $2X - 1 \geq Y$.

Λύση:

(i)

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{1+y}, & 0 \leq x \leq 1+y \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα $E[X] = E[E[X|Y]]$, η απόδειξη της οποίας δίνεται παρακάτω:

$$\begin{aligned} E[E[X|Y]] &= \int_{-\infty}^{\infty} E[X|Y=y] f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{XY}(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \\ &= E[X] \end{aligned}$$

Έτσι,

$$E[X|Y] = \int_0^{1+y} \frac{x}{1+y} dx = \frac{y+1}{2}$$

$$E[X] = E\left[\frac{1+y}{2}\right] = \int_0^1 \frac{1+y}{2} dy = \left[\frac{y + \frac{y^2}{2}}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{4}.$$

(ii)

$$f_{X,Y}(x, y) = f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{1+y}, & 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1+y \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(iii)

$$\begin{aligned} P(2X - 1 \geq Y) &= 1 - P(2X - 1 < Y) = 1 - \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^{\frac{y+1}{2}} \frac{1}{y+1} dx dy \\ &= 1 - \int_{y=0}^1 \frac{1}{y+1} [x]_0^{\frac{y+1}{2}} dy \\ &= 1 - \int_{y=0}^1 \frac{1}{y+1} \frac{y+1}{2} dy \\ &= 1 - \int_{y=0}^1 \frac{1}{2} dy \\ &= 1 - \frac{1}{2} [y]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$