

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 5

Άσκηση 1

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τη σχέση:

$$f_X(x) = \begin{cases} 4(1-x)^3 & , \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- (α) Εξετάστε αν η παραπάνω συνάρτηση ικανοποιεί τις συνθήκες μίας συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας.
- (β) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X .
- (γ) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(x)$, της X .
- (δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X = 0.6)$.
- (ε) Υπολογίστε την πιθανότητα $P\left(\frac{1}{3} < X \leq \frac{4}{3}\right)$.

Λύση

- (α) Έστω X μια τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τη σχέση

$$f_X(x) = \begin{cases} 4(1-x)^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Ισχύει $f_X(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$, δηλαδή η συνάρτηση είναι μη αρνητική. Επιπλέον ισχύει η ιδιότητα της κανονικοποίησης:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = \int_0^1 4(1-x)^3 dx = 4 \int_0^1 (1-x)^3 dx = 4 \left[\frac{-(1-x)^4}{4} \right]_0^1 = \left[-(1-x)^4 \right]_0^1 = 0 + 1 = 1.$$

Συνεπώς, ικανοποιούνται οι δύο συνθήκες, οπότε η $f_X(x)$ είναι μια έγκυρη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

- (β)

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 4x(1-x)^3 dx = 4 \int_0^1 x \cdot (1-3x+3x^2-x^3) dx \\ &= 4 \int_0^1 (x-3x^2+3x^3-x^4) dx = 4 \left[\frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{3x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 \\ &= 4 \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{5} - 0 \right) = 2 - 4 + 3 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Υπολογίζω τη δεύτερη ροπή της τ.μ. X :

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^1 4x^2(1-x)^3 dx = 4 \int_0^1 x^2 \cdot (1-3x+3x^2-x^3) dx \\ &= 4 \int_0^1 (x^2-3x^3+3x^4-x^5) dx = 4 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} + \frac{3x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \right]_0^1 \\ &= 4 \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \frac{1}{6} - 0 \right) = \frac{4}{3} - 3 + \frac{12}{5} - \frac{2}{3} = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{15} - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{15} - \frac{1}{25} = \frac{5-3}{75} = \frac{2}{75}.$$

Τελικά: $E[X] = \frac{1}{5} = 0.2$ και $\text{var}(X) = \frac{2}{75} \approx 0.0267$.

- (γ) Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της X δίνεται από την σχέση: $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$.
Για $0 \leq x \leq 1$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_0^x 4(1-t)^3 dt = \left[-(1-t)^4 \right]_0^x = -(1-x)^4 + (1-0)^4 = 1 - (1-x)^4$$

Για $x < 0$ είναι $F_X(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$, ενώ για $x \geq 1$ είναι $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_0^1 4(1-t)^3 dt = 1$
Τελικά,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \text{αν } x < 0 \\ 1 - (1-x)^4 & , \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & , \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

- (δ) Εφόσον η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή, θα είναι $P(X = 0.6) = 0$

- (ε) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$P\left(\frac{1}{3} < X \leq \frac{4}{3}\right) = F_X\left(\frac{4}{3}\right) - F_X\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - \left(1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)^4\right) = 1 - 1 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} \approx 0.1975.$$

Άσκηση 2

Καθώς πλησιάζουν τα Χριστούγεννα, αποφασίζετε να στολίσετε το χριστουγεννιάτικο δέντρο σας με χριστουγεννιάτικα λαμπάκια. Η διάρκεια ζωής (σε μέρες) για καθένα από τα λαμπάκια ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 0.1$, ανεξάρτητα από τα άλλα λαμπάκια, δηλαδή έχει αθροιστική συνάρτηση κατανομής:

$$F_{X_i}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0.1x}, & \text{αν } x \geq 0, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Έχετε πολύ μικρό χριστουγεννιάτικο δέντρο, οπότε η κορδέλα με τα λαμπάκια έχει 4 λαμπάκια. Επειδή όμως τα χριστουγεννιάτικα φωτάκια συνδέονται σε σειρά, όταν χαλάσει το 1ο, σταματάνε να λειτουργούν όλα μαζί. Έτσι, η διάρκεια ζωής για τα Χριστουγεννιάτικα φωτάκια μοντελοποιείται με την τ.μ. $X = \min\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$.

- (α) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(x)$ της τυχαίας μεταβλητής X .
(β) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_X(x)$ της τυχαίας μεταβλητής X .
(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα τα χριστουγεννιάτικα φωτάκια να κρατήσουν το πολύ 4 μέρες.

Λύση

- (α) Θα είναι:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = P(\min\{X_1, X_2, X_3, X_4\} \leq x) = 1 - P(\min\{X_1, X_2, X_3, X_4\} > x) \\ &= 1 - P(X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x, X_4 > x) = 1 - P(X_1 > x)P(X_2 > x)P(X_3 > x)P(X_4 > x) \\ &= 1 - (1 - P(X_1 \leq x))(1 - P(X_2 \leq x))(1 - P(X_3 \leq x))(1 - P(X_4 \leq x)) \\ &= 1 - (1 - F_{X_1}(x))(1 - F_{X_2}(x))(1 - F_{X_3}(x))(1 - F_{X_4}(x)) = 1 - (1 - F_{X_i}(x))^4 \\ &= 1 - (1 - (1 - e^{-0.1x}))^4 = 1 - (e^{-0.1x})^4 = 1 - e^{-0.4x}, \text{ για } x \geq 0. \end{aligned}$$

Οπότε, τελικά:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0.4x}, & \text{αν } x \geq 0, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- (β) Παραγωγίζοντας την αθροιστική συνάρτηση κατανομής που υπολογίσαμε παραπάνω, παίρνουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X :

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} (F_X(x)) = \frac{d}{dx} (1 - e^{-0.4x}) = \frac{d}{dx} (1) - \frac{d}{dx} (e^{-0.4x}) = 0 - e^{-0.4x} \frac{d}{dx} (-0.4x) = 0.4e^{-0.4x}, \text{ για } x \geq 0.$$

Έτσι:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.4e^{-0.4x}, & \text{αν } x \geq 0, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Μπορεί κανείς εύκολα να παρατηρήσει ότι η τ.μ. X ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 0.4$.

- (γ) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(X \leq 4) = F_X(4) = 1 - e^{-0.4 \times 4} = 1 - e^{-1.6} \approx 1 - 0.2019 \Rightarrow P(X \leq 4) \approx 0.7981.$$

Άσκηση 3

Δίνεται η τ.μ. $X \sim U[2, 10]$, δηλαδή η X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[2, 10]$. Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος $X^2 - 12X + 35 > 0$.

Λύση

Ισχύει ότι $X^2 - 12X + 35 = (X - 5)(X - 7)$. Οπότε, $X^2 - 12X + 35 > 0$ αν και μόνο αν $\{X > 7\} \cup \{X < 5\}$. Εφόσον $X \sim U[2, 10]$, $f_X(x) = \frac{1}{8}$ για $x \in [2, 10]$ και $f_X(x) = 0$, αλλιώς. Άρα, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X^2 - 12X + 35 > 0) &= P(\{X > 7\} \cup \{X < 5\}) \cap \{2 \leq X \leq 10\} = P(\{2 \leq X < 5\} \cup \{7 < X \leq 10\}) \\ &= P(\{2 \leq X < 5\}) + P(\{7 < X \leq 10\}) = \frac{1}{8} \cdot (5 - 2) + \frac{1}{8} \cdot (10 - 7) = 0.75. \end{aligned}$$

Άσκηση 4

Η εσωτερική διάμετρος (σε ίντσες) των σωλήνων από χαλκό που παράγει ένα εργοστάσιο ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(10, \sigma^2)$. Σωλήνες με εσωτερική διάμετρο εκτός των ορίων 10 ± 0.1 ίντσες ανακυκλώνονται.

- (α) Αν $\sigma = 0.1$, να βρεθεί η πιθανότητα να ανακυκλωθούν ακριβώς τρεις σωλήνες σε ένα δείγμα πέντε σωλήνων που επιλέγεται τυχαία από την παραγωγή του εργοστασίου.
- (β) Πόση θα πρέπει να γίνει η παράμετρος σ^2 έτσι ώστε η πιθανότητα ανακύκλωσης ενός σωλήνα να είναι 0.06;

Λύση

Έστω η τ.μ. X που αναπαριστά την εσωτερική διάμετρο των σωληνών. Τότε $X \sim N(10, \sigma^2)$. Η πιθανότητα ανακύκλωσης των σωληνών είναι

$$\begin{aligned} p &= P(\{X > 10.1\} \cup \{X < 9.9\}) = 1 - P(9.9 < X < 10.1) \\ &= 1 - P\left(\frac{9.9 - 10}{\sigma} < \frac{X - 10}{\sigma} < \frac{10.1 - 10}{\sigma}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right) + \Phi\left(-\frac{0.1}{\sigma}\right) \\ &= 2\left(1 - \Phi\left(\frac{0.1}{\sigma}\right)\right). \end{aligned}$$

- α) Η πιθανότητα ανακύκλωσης για $\sigma = 0.1$ είναι

$$p = 2(1 - \Phi(1)) = 2(1 - 0.8413) = 0.3174.$$

Έστω Y η τ.μ. που αναπαριστά τον αριθμό των σωληνών από το δείγμα των 5 σωληνών που ανακυκλώνονται. Ισχύει ότι $Y \sim \Delta(n = 5, p = 0.3174)$. Τότε,

$$P(Y = 3) = \binom{5}{3} (0.3174)^3 (1 - 0.3174)^2 \approx 0.149.$$

β) Θα πρέπει

$$p = 2 \left(1 - \Phi \left(\frac{0.1}{\sigma} \right) \right) = 0.06 \Rightarrow \Phi \left(\frac{0.1}{\sigma} \right) = 0.97 \approx \Phi(1.88).$$

Άρα,

$$\frac{0.1}{\sigma} = 1.88 \Rightarrow \sigma = 0.053 \Rightarrow \sigma^2 = 0.002809.$$

Άσκηση 5

Εστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή $\mu = -6$ και διασπορά $\sigma^2 = 9$, δηλαδή $X \sim N(-6, 9)$ και η τ.μ. Y ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή $\mu = 1$ και διασπορά $\sigma^2 = 4$, δηλαδή $Y \sim N(1, 4)$. Οι X, Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Να υπολογιστούν οι παρακάτω πιθανότητες:

(α) $P(X = -6)$.

(β) $P(-4 < X < 2)$.

(γ) $P(|Y| \geq \frac{5}{2})$.

(δ) $P(X^2 + 8X + 15 < 0)$.

(ε) Αν $Z = X + Y$, υπολογίστε την $P(Z < -4)$.

Λύση

(α) Εφόσον η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή, θα είναι $P(X = -6) = 0$.

(β)

$$\begin{aligned} P(-4 < X < 2) &= P(X < 2) - P(X < -4) = P\left(\frac{X+6}{3} < \frac{2+6}{3}\right) - P\left(\frac{X+6}{3} < \frac{-4+6}{3}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{8}{3}\right) - \Phi\left(\frac{2}{3}\right) \approx \Phi(2.67) - \Phi(0.67) = 0.9962 - 0.7486 = 0.2476. \end{aligned}$$

Άρα, $P(-4 < X < 2) \approx 0.2476$.

(γ)

$$\begin{aligned} P\left(|Y| \geq \frac{5}{2}\right) &= P\left(\left\{Y \leq -\frac{5}{2}\right\} \cup \left\{Y \geq \frac{5}{2}\right\}\right) = P\left(Y \leq -\frac{5}{2}\right) + P\left(Y \geq \frac{5}{2}\right) \\ &= P\left(Y \leq -\frac{5}{2}\right) + 1 - P\left(Y \leq \frac{5}{2}\right) \\ &= P\left(\frac{Y-1}{2} \leq \frac{-\frac{5}{2}-1}{2}\right) + 1 - P\left(\frac{Y-1}{2} \leq \frac{\frac{5}{2}-1}{2}\right) = \Phi(-1.75) + 1 - \Phi(0.75) \\ &= 1 - \Phi(1.75) + 1 - \Phi(0.75) = 1 - 0.9599 + 1 - 0.7734 = 0.0401 + 0.2266 = 0.2667. \end{aligned}$$

Άρα, $P(|Y| \geq \frac{5}{2}) \approx 0.2667$.

(δ) Παρατηρούμε ότι $X^2 + 8X + 15 = (X+5)(X+3)$. Οπότε, θα ισχύει $X^2 + 8X + 15 < 0$, αν και μόνο αν $\{X > -5\} \cap \{X < -3\}$.

Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X^2 + 8X + 15 < 0) &= P(\{X > -5\} \cap \{X < -3\}) = P(-5 < X < -3) = P(X < -3) - P(X < -5) \\ &= P\left(\frac{X+6}{3} < \frac{-3+6}{3}\right) - P\left(\frac{X+6}{3} < \frac{-5+6}{3}\right) = \Phi(1) - \Phi\left(\frac{1}{3}\right) \\ &\approx \Phi(1) - \Phi(0.33) = 0.8413 - 0.6293 = 0.212. \end{aligned}$$

Τελικά, $P(X^2 + 8X + 15 < 0) \approx 0.212$.

- (ε) Ξέρουμε από τη θεωρία ότι το άθροισμα 2 ανεξάρτητων Γκαουσιανών τ.μ. X, Y με μέση τιμή μ_1, μ_2 και διασπορά σ_1^2, σ_2^2 αντίστοιχα θα είναι επίσης μια Γκαουσιανή τ.μ. με μέση τιμή $\mu = \mu_1 + \mu_2$ και διασπορά $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Έτσι:

$$Z \sim N(-6 + 1, 9 + 4) \Leftrightarrow Z \sim N(-5, 13).$$

Άρα

$$P(Z < -4) = P\left(\frac{Z+5}{\sqrt{13}} < \frac{-4+5}{\sqrt{13}}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right) \approx \Phi(0.28) = 0.6103.$$

Συνεπώς, $P(Z < -4) \approx 0.6103$.

Άσκηση 6

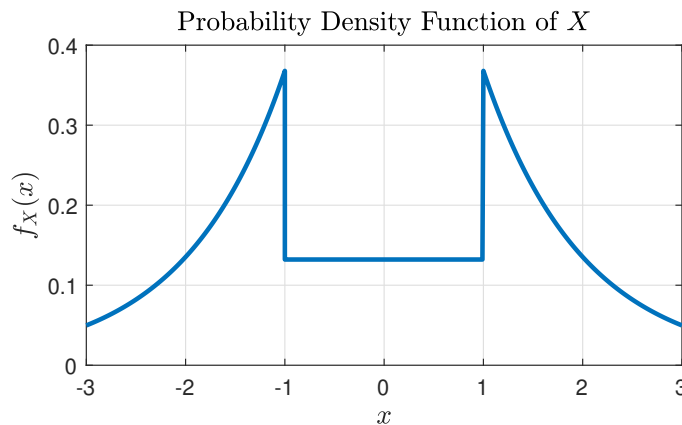
Μία συνεχής τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X έχει την ακόλουθη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

$$f_X(x) = \begin{cases} e^x, & x < -1, \\ c, & -1 \leq x \leq 1, \\ e^{-x}, & x > 1. \end{cases}$$

- (α) Να δώσετε τη γραφική παράσταση της σ.π.π. και να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς c .
 (β) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) της τ.μ. X και δώστε την γραφική της παράσταση.
 (γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(-0.5 \leq X \leq 2)$.

Λύση

(α)



Πρέπει να ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx &= 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{-1} e^x dx + \int_{-1}^1 c dx + \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = 1 \Rightarrow [e^x]_{-\infty}^{-1} + [cx]_{-1}^1 + [-e^{-x}]_1^{+\infty} \\ &\Rightarrow e^{-1} + 2c + e^{-1} = 1 \Rightarrow 2c + \frac{2}{e} = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} \Rightarrow c \approx 0.1321. \end{aligned}$$

(β) Γνωρίζουμε ότι

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt,$$

άρα έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Για $x \leq -1$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x e^t dt = [e^t]_{-\infty}^x = e^x.$$

- $\Gamma\alpha -1 \leq x \leq 1$:

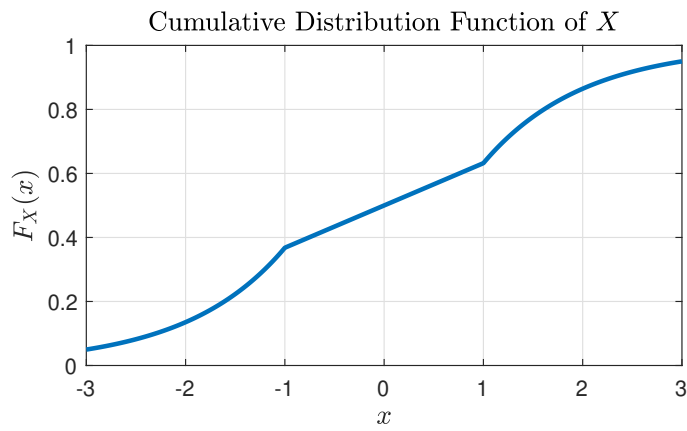
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{-1} e^t dt + \int_{-1}^x c dt = [e^t]_{-\infty}^{-1} + [ct]_{-1}^x = \frac{1}{e} + c(x+1) = 0.1321x + 0.5.$$

- $\Gamma\alpha x > 1$:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{-1} e^t dt + \int_{-1}^1 c dt + \int_1^x e^{-t} dt = [e^t]_{-\infty}^{-1} + [ct]_{-1}^1 + [-e^{-t}]_1^x \\ &= \frac{1}{e} + 2c - e^{-x} = 1 - e^{-x}. \end{aligned}$$

Οπότε,

$$F_X(x) = \begin{cases} e^x, & x < -1, \\ 0.1321x + 0.5, & -1 \leq x \leq 1, \\ 1 - e^{-x}, & x > 1. \end{cases}$$



(γ)

$$P(-0.5 \leq X \leq 2) = F_X(2) - F_X(-0.5) = 1 - e^{-2} - [0.1321(-0.5) + 0.5] = 0.4307.$$