

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 4

Άσκηση 1

Ρίχνουμε 3 τίμια κέρματα. Έστω X η τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) που δείχνει πόσες φορές εμφανίστηκε κορώνα. Να βρεθούν οι τιμές που παίρνει η τ.μ. X και να υπολογιστεί η Συνάρτηση Πιθανότητας (Μάζας) (PMF), $p_X(x)$, αυτής. Αποδείξτε ότι η $p_X(x)$ είναι μία έγκυρη Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας.

Λύση

Έστω τα ενδεχόμενα: $K=\{\text{έρχεται κορώνα}\}$ και $\Gamma=\{\text{έρχεται γράμματα}\}$.

Τα κέρματα είναι τίμια, άρα $P(K) = \frac{1}{2}$ και $P(\Gamma) = \frac{1}{2}$.

Η τ.μ. X λαμβάνει τις τιμές $x = 0, 1, 2, 3$, καθώς μπορεί να εμφανιστεί κορώνα από 0 – 3 φορές συνολικά. Βρίσκουμε λοιπόν αναλυτικά:

- $p_X(0) = P(X = 0) = P(\Gamma\Gamma\Gamma) = P(\Gamma) \cdot P(\Gamma) \cdot P(\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
- $p_X(1) = P(X = 1) = P(K\Gamma\Gamma) + P(\Gamma K\Gamma) + P(\Gamma\Gamma K) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
- $p_X(2) = P(X = 2) = P(KK\Gamma) + P(K\Gamma K) + P(\Gamma K K) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
- $p_X(3) = P(X = 3) = P(KKK) = P(K) \cdot P(K) \cdot P(K) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

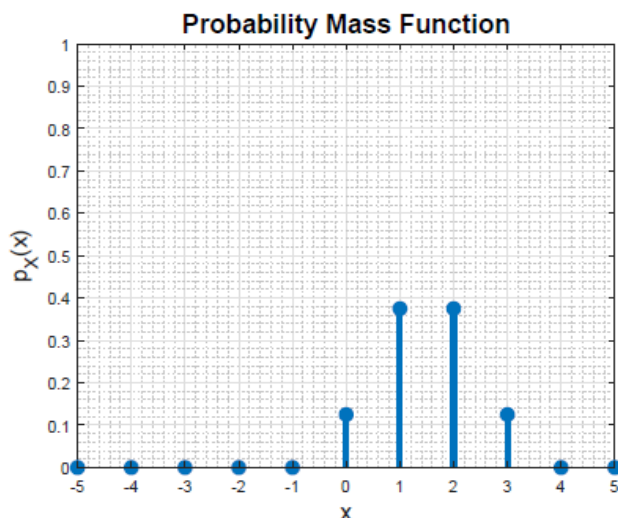
Άρα, η Συνάρτηση Πιθανότητας (Μάζας) θα είναι:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & x = 0, 3 \\ \frac{3}{8} & x = 1, 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Η $p_X(x)$ είναι μία έγκυρη Συνάρτηση Πιθανότητας (Μάζας), καθώς ισχύει ότι:

$$\sum_x p_X(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

Η γραφική της παράσταση (περιορισμένη στο διάστημα $[-5, 5]$) φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Συνάρτηση Πιθανότητας (Μάζας) $p_X(x)$.

Άσκηση 2

Μία τ.μ. X παίρνει τιμές $\{0, 1, 2, k\}$ με αντίστοιχες πιθανότητες $\{\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, a\}$.

(α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα a .

(β) Αν $E[X] = \frac{8}{3}$, να βρεθεί η τιμή k .

(γ) Με βάση τα ερωτήματα (α), (β), να υπολογιστεί η διασπορά της X , $var(X)$.

Λύση

(α) Θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη κανονικοποίησης:

$$\sum_x p_X(x) = 1 \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + a = 1 \Rightarrow \frac{5}{30} + \frac{6}{30} + \frac{10}{30} + a = 1 \Rightarrow \frac{21}{30} + a = 1 \Rightarrow a = 1 - \frac{21}{30} \Rightarrow a = \frac{9}{30} \Rightarrow a = \frac{3}{10}$$

(β) Δεδομένης της τιμής του a που προσδιορίσαμε στο (α) ερώτημα, έχουμε:

$$E[X] = \frac{8}{3} \Rightarrow \sum_x x p_X(x) = \frac{8}{3} \Rightarrow 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{3} + k \cdot \frac{3}{10} = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{1}{5} + \frac{2}{3} + k \cdot \frac{3}{10} = \frac{8}{3} \Rightarrow k \cdot \frac{3}{10} = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} - \frac{1}{5} \Rightarrow k \cdot \frac{3}{10} = 2 - \frac{1}{5} \Rightarrow k \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{5} \Rightarrow k = \frac{90}{15} \Rightarrow \boxed{k = 6}$$

(γ) Αντίστοιχα με πριν, έχουμε:

$$E[X^2] = \sum_x x^2 p_X(x) = 0^2 \cdot \frac{1}{6} + 1^2 \cdot \frac{1}{5} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} + 6^2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{5} + \frac{4}{3} + \frac{108}{10} = \frac{6}{30} + \frac{40}{30} + \frac{324}{30} = \frac{37}{3}$$

Από γνωστές ιδιότητες υπολογισμού της διασποράς, έχουμε:

$$var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{37}{3} - \frac{64}{9} = \frac{111}{9} - \frac{64}{9} = \frac{47}{9}$$

Άσκηση 3

Ο φίλος σας ο Γεράσιμος είναι φανατικός τζογαδόρο, ο οποίος όμως δεν έχει παρακολουθήσει το ΗΥ-217. Ακούει ότι ένα καζίνο στο Ηράκλειο προσφέρει λαχεία. Κάθε λαχείο κερδίζει με πιθανότητα $p = \frac{1}{50}$. Ένα λαχείο μπορεί να αγοραστεί "επενδύοντας" το ποσό των C ευρώ. Αν κληρωθεί το λαχείο, ο παίκτης κερδίζει 100 φορές την "επένδυσή" του: $X = 100C$ ευρώ. Αν δεν κληρωθεί, ο παίκτης λαμβάνει πίσω $X = 0$ ευρώ, δηλαδή χάνει όλη την αρχική του "επένδυση".

(α) Ο Γεράσιμος θέλει να ποντάρει όλες τις οικονομίες του (100 ευρώ) αγοράζοντας ένα και μοναδικό λαχείο για $C = 100$ ευρώ. Έστω X το ποσό που κερδίζει.

(i) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X .

(ii) Υπολογίστε τη μέση τιμή $E[X]$ και την τυπική απόκλιση σ_X του κέρδους.

(β) Καθώς έχετε παρακολουθήσει το ΗΥ-217, συμβουλευέστε το φίλο σας να ακολουθήσει διαφορετική στρατηγική με τα χρήματά του: Αντί να αγοράσει 1 λαχείο για $C = 100$ ευρώ, να αγοράσει $n = 100$ λαχεία το καθένα με $C = 1$ ευρώ. Έστω Y το ποσό που κερδίζει ο Γεράσιμος ακολουθώντας τη δική σας στρατηγική.

(i) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y .

(ii) Υπολογίστε τη μέση τιμή $E[Y]$ και την τυπική απόκλιση σ_Y του κέρδους.

Είναι πράγματι καλύτερη η στρατηγική σας; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση

(α) Προφανώς ο Γεράσιμος λαμβάνει πίσω $100 \cdot 100$ ευρώ, με πιθανότητα $\frac{1}{50}$ και 0 ευρώ με πιθανότητα $\frac{49}{50}$. Συνεπώς,

$$p_X(K) = \begin{cases} \frac{49}{50} & x = 0 \\ \frac{1}{50} & x = 10000 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Η μέση τιμή θα είναι:

$$E[X] = 0 \cdot \frac{49}{50} + 10000 \cdot \frac{1}{50} = 200$$

Η ροπή δεύτερης τάξης θα είναι:

$$E[X^2] = 0^2 \cdot \frac{49}{50} + 10000^2 \cdot \frac{1}{50} = 2 \cdot 10^6$$

Επομένως, η διασπορά γίνεται:

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 2 \cdot 10^6 - (200)^2 = 1960000$$

Η τυπική απόκλιση θα είναι: $\sigma_X = \sqrt{\text{var}(X)} = \sqrt{1960000} = 1400$ ευρώ.

(β)

(i) Σε αυτή τη περίπτωση, ο Γεράσιμος λαμβάνει πίσω $Y = 100W$ ευρώ. Η τυχαία μεταβλητή W εκφράζει το πλήθος των λαχείων που κερδίζουν (απο 100 ευρώ το καθένα) και ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους: $n = 100, p = \frac{1}{50}, W \approx \Delta(n = 100, p = \frac{1}{50})$.

Συνεπώς, η τυχαία μεταβλητή Y παίρνει τιμές στο σύνολο $\{0, 100, 200, \dots, 9800, 9900, 10000\}$ με πιθανότητα:

$$p_Y(100k) = \binom{100}{k} \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^k \cdot \left(\frac{49}{50}\right)^{100-k}, k = 0, 1, 2, \dots, 100$$

(ii) Με τη νέα στρατηγική, η μέση τιμή γίνεται:

$$E[Y] = 100 \cdot E[W] = 100np = 100 \cdot 100 \cdot \frac{1}{50} = 200$$

Η διασπορά γίνεται:

$$\text{var}(Y) = \text{var}(100W) = 10^4 \text{var}(W) = 10^4 np(1-p) = 10^4 \cdot 100 \cdot \left(\frac{1}{50}\right) \cdot \left(\frac{49}{50}\right) = 196000$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε την ίδια τυπική απόκλιση, $\sigma_Y = 140$ ευρώ. Και οι δύο στρατηγικές δίνουν το ίδιο μέσο κέρδος, αλλά η δεύτερη στρατηγική έχει 10 φορές μικρότερη τυπική απόκλιση.

Άσκηση 4

(α) Έστω X διωνυμική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους $(10, p)$. Να υπολογίσετε: (i) την πιθανότητα η X να πάρει την τιμή 2 και (ii) τη διασπορά της τ.μ. $2 + 3X$.

(β) Έστω Z “Poisson” τυχαία μεταβλητή. Αν $E[Z] = 3$, ποια είναι η μέση τιμή της τ.μ. $Y = (Z-2)^2$.

Λύση

$$(\alpha, i) P(X = 2) = \binom{10}{2} p^2 (1-p)^8 = \frac{10!}{2!8!} p^2 (1-p)^8 = 45 p^2 (1-p)^8$$

$$(\alpha, ii) \text{var}(3X + 2) = 3^2 \text{var}(X) = 9 \cdot n \cdot p \cdot (1-p) = 9 \cdot 10 \cdot p(1-p) = 90p(1-p)$$

(β) Για την Poisson δείξαμε ότι $E[Z] = \text{var}(Z) = \lambda = 3$.

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[(Z-2)^2] = E[Z^2 - 4Z + 4] = E[Z^2] - 4E[Z] + 4 \\ &= \text{var}(Z) + (E[Z])^2 - 4E[Z] + 4 \\ &= \lambda + \lambda^2 - 4\lambda + 4 = \lambda^2 - 3\lambda + 4 \\ &= 3^2 - 3 \cdot 3 + 4 = 4 \end{aligned}$$

Άσκηση 5

Έστω η τ.μ. Q με πεδίο τιμών $\{1, 2\}$ και η τ.μ. Y με πεδίο τιμών $\{1, 2, 3\}$. Υποθέστε ότι η από κοινού Συνάρτηση Πιθανότητας για τις τ.μ. (X, Y) δίδεται από τη σχέση $p_{X,Y}(x, y) = c(x + y)$, όπου $x \in \{1, 2\}$, $y \in \{1, 2, 3\}$ και c είναι μία σταθερά.

(α) Βρείτε την τιμή της σταθεράς c

(β) Βρείτε τις περιθωριακές συναρτήσεις πιθανότητας για τις τ.μ. X και Y , $p_X(x), p_Y(y)$.

Λύση

(α) Πρέπει να ισχύει:

$$\sum_{x=1}^2 \sum_{y=1}^3 p(x, y) = 1$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{x=1}^2 \sum_{y=1}^3 c(x + y) = c \left(\sum_{x=1}^2 \sum_{y=1}^3 x + \sum_{y=1}^3 \sum_{x=1}^2 y \right) \\ &= c \left(3 \sum_{x=1}^2 x + 2 \sum_{y=1}^3 y \right) = c(3 \cdot 3 + 2 \cdot 6) = 21c \end{aligned}$$

Άρα, $c = \frac{1}{21}$

(β)

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \sum_{y=1}^3 p(x, y) = \frac{1}{21} \sum_{y=1}^3 (x + y) = \frac{3x + 6}{21}, \quad x = 1, 2 \\ p_Y(y) &= \sum_{x=1}^2 p(x, y) = \frac{1}{21} \sum_{x=1}^2 (x + y) = \frac{3 + 2y}{21}, \quad y = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Άσκηση 6

Δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y παίρνουν τιμές x και y , αντίστοιχα, στο σύνολο $\{0, 1, 2, 3\}$. Στον πίνακα που ακολουθεί μας δίδεται μερική πληροφορία για την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $p_{X,Y}(x, y)$ και τις περιθωριακές συναρτήσεις πιθανότητας $p_X(x)$ και $p_Y(y)$ των τ.μ. X και Y αντίστοιχα. Επίσης, δίδεται ότι $P(X = Y) = 0.06$.

$Y \backslash X$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$p_Y(y)$
$y = 0$	0.01	0	0.09	0.05	0.15
$y = 1$	?	0	0.01	0.2	?
$y = 2$	0.1	?	0.05	?	0.3
$y = 3$	?	0.1	0.05	?	0.25
$p_X(x)$	0.3	0.2	0.2	?	

(α) Χρησιμοποιώντας την πληροφορία που σας δίδεται, συμπληρώστε τις τιμές που λείπουν από τον πίνακα. Θα πρέπει να περιγράψετε αναλυτικά πώς προέκυψε η κάθε τιμή που υπολογίσατε.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα η τ.μ. X να παίρνει τιμές μεγαλύτερες από την τ.μ. Y .

(γ) Δεδομένου ότι $Y = 2$, ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ότι $X = 3$; Βρείτε επίσης τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(X \text{ είναι ζυγός} | Y \text{ είναι ζυγός})$.

(δ) Έστω $Z = 5Y - X^2$. Βρείτε τη μέση τιμή $E[Z]$ της τ.μ. Z .

(ε) Είναι οι τ.μ. X και Y ανεξάρτητες; Αιτιολογήστε.

Λύση

(α) Δεδομένου ότι $P(X = Y) = 0.06$ ισχύει:

$$p_{X,Y}(0,0) + p_{X,Y}(1,1) + p_{X,Y}(2,2) + p_{X,Y}(3,3) = 0.06 \Leftrightarrow 0.01 + 0 + 0.05 + p_{X,Y}(3,3) = 0.06 \Leftrightarrow \mathbf{p_{X,Y}(3,3) = 0}$$

Ακόμη:

$$p_Y(3) = p_{X,Y}(0,3) + p_{X,Y}(1,3) + p_{X,Y}(2,3) + p_{X,Y}(3,3) \Leftrightarrow 0.25 = p_{X,Y}(0,3) + 0.1 + 0.05 + 0 \Leftrightarrow \mathbf{p_{X,Y}(0,3) = 0.1}$$

$$p_X(0) = p_{X,Y}(0,0) + p_{X,Y}(0,1) + p_{X,Y}(0,2) + p_{X,Y}(0,3) \Leftrightarrow 0.3 = 0.01 + p_{X,Y}(0,1) + 0.1 + 0.1 \Leftrightarrow \mathbf{p_{X,Y}(0,1) = 0.09}$$

Με αντίστοιχο τρόπο προκύπτουν και οι υπόλοιπες τιμές που φαίνονται στον πίνακα.

$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$\mathbf{p_Y(y)}$
$y = 0$	0.01	0	0.09	0.05	0.15
$y = 1$	<u>0.09</u>	0	0.01	0.2	<u>0.3</u>
$y = 2$	0.1	<u>0.1</u>	0.05	<u>0.05</u>	0.3
$y = 3$	<u>0.1</u>	0.1	0.05	<u>0</u>	0.25
$\mathbf{p_X(x)}$	0.3	0.2	0.2	<u>0.3</u>	

(β)

$$P(X > Y) = p_{X,Y}(1, 0) + p_{X,Y}(2, 0) + p_{X,Y}(3, 0) + p_{X,Y}(2, 1) + p_{X,Y}(3, 1) + p_{X,Y}(3, 2) = 0 + 0.09 + 0.05 + 0.01 + 0.2 + 0.05 = 0.4$$

(γ)

$$P(X = 3|Y = 2) = \frac{P(X = 3, Y = 2)}{P(Y = 2)} = \frac{0.05}{0.3} = \frac{1}{6} \quad (1)$$

$$P(X \text{ είναι ζυγός} | Y \text{ είναι ζυγός}) = \frac{P(X \text{ είναι ζυγός}, Y \text{ είναι ζυγός})}{P(Y \text{ είναι ζυγός})} = \frac{p_{X,Y}(0, 0) + p_{X,Y}(0, 2) + p_{X,Y}(2, 0) + p_{X,Y}(2, 2)}{p_Y(0) + p_Y(2)} = \frac{0.01 + 0.1 + 0.09 + 0.05}{0.15 + 0.3} = \frac{0.25}{0.45} = \frac{5}{9} \quad (2)$$

(δ)

$$E[Z] = E[5Y - X^2] = 5E[Y] - E[X^2] = 5 \cdot (0 \cdot 0.15 + 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.25) - (0^2 \cdot 0.3 + 1^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.2 + 3^2 \cdot 0.3) = 5 \cdot (0 + 0.3 + 0.6 + 0.75) - (0 + 0.2 + 0.8 + 2.7) = 5 \cdot 1.65 - 3.7 = 4.55.$$

(ε) Δεδομένη της γνώσης ότι $X = 1$, γνωρίζουμε ότι η Y δεν μπορεί να πάρει τις τιμές 0 και 1. Αυτό συνεπάγεται σχέση εξάρτησης ανάμεσα στις X και Y και επομένως δεν είναι ανεξάρτητες.

Εναλλακτικά, μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$p_Y(0) \neq p_{Y|X}(Y = 0|X = 1) \Leftrightarrow 0.15 \neq \frac{p_{X,Y}(0, 1)}{p_X(1)} \Leftrightarrow 0.15 \neq \frac{0}{p_X(1)} \Leftrightarrow 0.15 \neq 0, \text{ που ισχύει.}$$