

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 3

Άσκηση 1.

- (A) Πόσες πινακίδες αυτοκινήτων με 3 γράμματα του ελληνικού αλφάβητου και 4 ψηφία μπορούν να σχηματιστούν; Πόσες από αυτές έχουν τουλάχιστον 2 διαφορετικά γράμματα;
- (B) Τραβάμε χαρτιά από μια τράπουλα 52 φύλλων, με επαναθέσεις. Με πόσους τρόπους είναι δυνατόν να τραβηχθούν 6 χαρτιά, έτσι ώστε στο 6ο χαρτί να εμφανίζεται η πρώτη επανάληψη;
- (Γ) Πόσες σημαίες με τρεις ρίγες μπορούν να σχηματιστούν εάν γνωρίζουμε ότι η μεσαία λωρίδα θα πρέπει να έχει διαφορετικό χρώμα από τις άλλες δύο και εάν τα πιθανά χρώματα είναι Κόκκινο, Μπλε, Κίτρινο, Πράσινο, Μαύρο και Άσπρο;
- (Δ) Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί abc , με $a, b, c \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ μπορούν να σχηματιστούν με την ιδιότητα $a \leq b \leq c$;
- (E) Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε 5 δώρα σε 15 άτομα, αν κανένα άτομο δε μπορεί να πάρει πάνω από ένα δώρο;
- (ΣΤ) Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν 7 από 15 συγκεκριμένους ανθρώπους σε έναν κύκλο;

Λύση:

- (A) Για να το βρούμε αρκεί να απαριθμήσουμε πόσες λέξεις με 3 γράμματα και πόσους 4ψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε. Μπορούμε να σκεφτούμε, αρχικά, ότι υπάρχουν 3 κενές θέσεις για γράμματα και 4 κενές θέσεις για ψηφία: _ _ _ _ _
Τα πιθανά γράμματα είναι 24 και τα πιθανά ψηφία είναι 10. Επομένως, για την πρώτη θέση στα γράμματα έχουμε 24 πιθανά γράμματα, για την 2η θέση έχουμε 24 πιθανά γράμματα και για την τρίτη θέση έχουμε 24 πιθανά γράμματα. Ομοίως, και για τα ψηφία. Δηλαδή:

$$24 \cdot 24 \cdot 24 = 24^3 \text{ συνδυασμοί γραμμάτων}$$

και

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 \text{ συνδυασμοί ψηφίων}$$

Άρα, όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί είναι:

$$24^3 \cdot 10^4$$

Εάν, τώρα, θέλουμε να έχουμε **τουλάχιστον** 2 διαφορετικά γράμματα, θα σκεφτούμε ως εξής:

Θα βρούμε όλες τις πιθανές πινακίδες με ακριβώς 2 διαφορετικά γράμματα και ακριβώς 3 διαφορετικά γράμματα, δηλαδή τις πινακίδες με τουλάχιστον 2 διαφορετικά γράμματα.

- Ακριβώς 2 διαφορετικά: Επιλέγω 2 γράμματα από τα 24 και το τρίτο γράμμα πρέπει υποχρεωτικά να είναι ένα από τα προηγούμενα 2 (οπότε 2 στο πλήθος ενδεχόμενα). Έστερα παίρνω όλες τις αναδιατάξεις τους οι οποίες είναι $\frac{3!}{2!} = 3$. Άρα

$$\binom{24}{2} \cdot 2 \cdot 3 = \frac{24!}{22!} \cdot 3 = 24 \cdot 23 \cdot 3$$

- Ακριβώς 3 διαφορετικά: Διατάξεις 3 γραμμάτων από το σύνολο των 24 πιθανών

$$P(24, 3) = \frac{24!}{21!} = 24 \cdot 23 \cdot 22$$

Αθροίζοντας το πλήθος των παραπάνω ενδεχομένων, έχουμε

$$24 \cdot 23 \cdot 2 + 24 \cdot 23 \cdot 22 = 24^2 \cdot 23$$

στο πλήθος διαφορετικές διατάξεις των 3 γραμμάτων με τουλάχιστον 2 διαφορετικά γράμματα.

Για να υπολογίσουμε το αντίστοιχο πλήθος πινακίδων αρκεί να πολλαπλασιάσουμε και με τις πιθανές διατάξεις 4 ψηφίων. Δηλαδή έχουμε συνολικά:

$$24 \cdot 23 \cdot 25 \cdot 10^4$$

πιθανές πινακίδες.

- (B) Για να έχουμε την πρώτη επανάληψη στο 6ο τράβηγμα, σημαίνει ότι τα πρώτα 5 χαρτιά μπορεί να είναι οποιαδήποτε (αλλά διαφορετικά μεταξύ τους). Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{52}{5}$ διαφορετικούς τρόπους. Το 6ο φύλλο πρέπει να είναι ένα από αυτά που έχουν ήδη προηγηθεί, άρα υπάρχουν 5 τρόποι να γίνει αυτό (ή αλλιώς $\binom{5}{1}$). Επομένως, συνολικά οι πιθανοί τρόποι να γίνει αυτό είναι:

$$\binom{52}{5} \cdot \binom{5}{1} = \binom{52}{5} \cdot 5 = \frac{52!}{5! \cdot 47!} \cdot 5 = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{24}$$

- (Γ) Υπάρχουν 6 πιθανά χρώματα για την πρώτη λωρίδα, έπειτα 5 για την δεύτερη (αφού δεν πρέπει να είναι ίδιο χρώμα με την πρώτη), και τέλος 5 πιθανά χρώματα για την τελευταία λωρίδα (οποιοδήποτε χρώμα εκτός αυτού της μεσαίας λωρίδας). Άρα υπάρχουν $6 \cdot 5 \cdot 5 = 150$ πιθανές σημαίες.

- (Δ) Αν όλα τα ψηφία είναι διαφορετικά μεταξύ τους τότε η σειρά τους καθορίζεται από τη σχέση $a \leq b \leq c$. Άρα υπάρχουν $\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$ πιθανοί αριθμοί που πληρούν τη συνθήκη. Αν $a = b$ αλλά $a \neq c$, τότε έχουμε $\binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36$ πιθανούς αριθμούς που πληρούν τη συνθήκη, και ίδιο πλήθος αριθμών για $b = c$ και $a \neq b$. Τέλος, υπάρχουν 9 πιθανοί τριψήφιοι αριθμοί abc τ.ω. $a = b = c$. Οπότε έχουμε συνολικά:

$$84 + 2 \cdot 36 + 9 = 165$$

πιθανούς διαφορετικούς αριθμούς που πληρούν την δοσμένη συνθήκη.

- (E) το πρώτο δώρο έχει 15 πιθανούς παραλήπτες, το 2ο 14, το 3ο 13 το 4ο 12 και το 5ο 11. Επομένως μπορούμε να μοιράσουμε 5 δώρα σε 15 άτομα με $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 = 360360$ ή εναλλακτικά, θέλουμε να υπολογίσουμε τους συνδυασμούς 5 αντικειμένων από 15 χωρίς επανατοποθέτηση: $\frac{15!}{(15-5)!} = \frac{15!}{10!} = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 = 360360$.

- (ΣΤ) Σκεφτόμαστε, αρχικά, πώς μπορούμε να βάλουμε 7 από 15 άτομα σε μια ευθεία, με

$$15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = \frac{15!}{8!} \text{ ή } P(15, 7) \text{ τρόπους.}$$

Έπειτα, διαιρούμε με το πλήθος των ατόμων στη διάταξη για να μην συμπεριλάβουμε πάνω από μια φορά την κάθε μετάθεση (αφού έχουμε μια κυκλική διάταξη). Άρα, το σύνολο των πιθανών μεταθέσεων είναι:

$$\frac{P(15, 7)}{7}$$

Άσκηση 2.

Ένα συρτάρι περιέχει 4 μαύρες, 6 κόκκινες και 8 κίτρινες κάλτσες. Διαλέγουμε τυχαία 2 κάλτσες από το συρτάρι.

(α) Με ποια πιθανότητα οι δύο κάλτσες που διαλέξαμε έχουν το ίδιο χρώμα;

(β) Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα ότι οι δύο κάλτσες είναι κίτρινες δεδομένου ότι έχουν το ίδιο χρώμα;

Λύση: (α) Υπάρχουν $\binom{4+6+8}{2} = \binom{18}{2} = \frac{18!}{2!16!} = 153$ συνολικά τρόποι με τους οποίους μπορώ να επιλέξω 2 κάλτσες από το συρτάρι. Από αυτούς, με $\binom{4}{2} = 6$ τρόπους επιλέγω 2 μαύρες, με $\binom{6}{2} = 15$ τρόπους επιλέγω 2 κόκκινες και με $\binom{8}{2} = 28$ τρόπους επιλέγω 2 κίτρινες. Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{6+15+28}{153} = \frac{49}{153} = 0.32$

(β) Έστω τα ενδεχόμενα:

$G = \{\text{οι δύο κάλτσες είναι κίτρινες}\}$

$F = \{\text{οι δύο κάλτσες έχουν το ίδιο χρώμα}\}$

Από το (α) γνωρίζω ότι $P(F) = \frac{49}{153}$ οπότε $P(G|F) = \frac{P(G \cap F)}{P(F)} = \frac{28/153}{49/153} = 0.5714$

Άσκηση 3. Για την ταυτότητα $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$:

(α) Δώστε μια αλγεβρική απόδειξη (αναλύοντας τις ήδη γνωστές σχέσεις-τύπους). Από τον ορισμό του $\binom{n}{k}$ έχουμε:

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))! (k-1)!} = \frac{(n-1)!}{(n-k)! (k-1)!}$$

Επίσης

$$\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)! k!}$$

Θα χρειαστούμε επίσης τις ιδιότητες: $k(k-1)! = k!$ και $(n-k)(n-k-1)! = (n-k)!$

Επομένως, ξεκινώντας από το δεξί μέλος της ταυτότητας (γίνεται κι αντίστροφα):

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(n-k)! (k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)! k!} \\ &= \frac{(n-1)!k}{(n-k)!k!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{(n-k)!k!} \\ &= \frac{(n-1)!(k+n-k)}{(n-k)!k!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} \end{aligned}$$

(β) Ερμηνεύστε την με ένα επιχείρημα συνδυαστικής (σχεφτείτε ένα πρόβλημα στο οποίο θα ταιριάζει και εξηγήστε το).

Ο πιο εύκολος τρόπος είναι να σκεφτούμε μια σειρά με n bits (παίρνουν τιμές 0 ή 1). Ας υποθέσουμε ότι ο αριθμός από σειρές bits μήκους n τα οποία περιέχουν k άσσους είναι $\binom{n}{k}$. Από αυτές τις σειρές, κάποιες ξεκινούν με άσσο, άλλες με μηδενικό. Θα υπολογίσουμε πόσες από αυτές ξεκινούν με άσσο, και πόσες με μηδενικό και θα προσθέσουμε το πλήθος τους.

- Αρχικά ας σκεφτούμε τις σειρές που ξεκινούν με άσσο. Μετά τον άσσο, ακολουθούν ακόμη $n - 1$ bits και ακριβώς $k - 1$ από αυτά πρέπει να είναι άσσοι. Πόσες πιθανές τέτοιες σειρές bits υπάρχουν; $\Rightarrow \binom{n-1}{k-1}$. Τι παρατηρήσαμε ως τώρα λοιπόν; Ότι από όλες τις σειρές από bits μήκους n που περιέχουν k άσσους, οι $\binom{n-1}{k-1}$ από αυτές ξεκινούν με άσσο.
- Ομοίως, υπάρχουν $\binom{n-1}{k}$ που ξεκινούν με 0 (μετά το πρώτο μηδενικό, χρειαζόμαστε ακόμη $n - 1$ bits που περιέχουν k άσσους).

Άρα, έχουμε:

$\{\text{Όλες οι πιθανές σειρές } n \text{ bits που περιέχουν } k \text{ άσσους}\} = \{\text{Όλες οι πιθανές σειρές } n \text{ bits που περιέχουν } k \text{ άσσους και ξεκινούν με 1}\} + \{\text{Όλες οι πιθανές σειρές } n \text{ bits που περιέχουν } k \text{ άσσους και ξεκινούν με 0}\}$. Δηλαδή:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Άλλος τρόπος: Πάμε σε ένα μαγαζί με σάντουιτς και θέλουμε να διαλέξουμε k υλικά ανάμεσα σε n επιλογές που δίνει το κατάστημα. Ένας τρόπος να υπολογίσουμε όλους τους συνδυασμούς είναι να πούμε απλώς ότι έχουμε $\binom{n}{k}$ συνδυασμούς. Άλλος τρόπος είναι να σκεφτούμε πχ αν θα βάλουμε ή όχι τυρί. Αν βάλουμε τυρί, τότε μένουν ακόμη να διαλέξουμε $k - 1$ υλικά από το σύνολο των $n - 1$ (όλα χωρίς το τυρί), δηλαδή $\binom{n-1}{k-1}$. Αν δεν θέλουμε τυρί, τότε μένουν ακόμη να διαλέξουμε k υλικά από το σύνολο των $n - 1$ (όλα χωρίς το τυρί), δηλαδή $\binom{n-1}{k}$. Επομένως όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί θα είναι το άθροισμα των δύο αυτών εκδοχών, δηλαδή $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. Αφού όμως υπολογίσαμε ακριβώς το ίδιο πλήθος συνδυασμών με το αρχικό σκεπτικό, δείξαμε αυτό που θέλαμε: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Μπορεί να αιτιολογηθεί και με διαφορετικούς τρόπους, όπως πχ την καταμέτρηση υποσυνόλων ενός συνόλου κ.α. Εάν η επιχειρηματολογία είναι σωστή βήμα βήμα χωρίς λογικά άλματα, τότε και η απόδειξη θα είναι ορθή.

Άσκηση 4.

Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, x = 1, 2, \dots$ είναι μια σ.π.π.

Λύση.

Πρέπει να δείξουμε:

α) $f(x) \geq 0, \forall x = 1, 2, \dots$, που ισχύει αφού $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0, \forall x \in$

β) $\sum_{x=1}^{\infty} f(x) = 1$.

Έχουμε:

$$\sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

Άσκηση 5.

Στο πόκερ 5 χαρτιά επιλέγονται από μία τράπουλα. Ποια η πιθανότητα στα 5 αυτά χαρτιά να έχουμε:

- (α) Έναν τουλάχιστον άσσο
- (β) Δύο ακριβώς βαλέδες
- (γ) Τρία χαρτιά του ίδιου είδους και δύο διαφορετικά

Λύση.

Για τον δειγματικό χώρο του πειράματος ισχύει ότι $N(\Omega) = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!}$

- (α) Οι τρόποι να τραβήξουμε τουλάχιστον έναν άσσο είναι ίσοι με όλους τους πιθανούς τρόπους $\left(\binom{52}{5}\right)$ να τραβήξουμε πέντε φύλλα μείον τους τρόπους να μην τραβήξουμε κανέναν άσσο. Για να μην τραβήξαμε κανέναν άσσο, σημαίνει ότι επιλέξαμε 5 φύλλα από τα υπόλοιπα 48 της τράπουλας (όλα μείον τους 4 άσσους), δηλαδή $\binom{48}{5}$. Επομένως είναι $\binom{52}{5} - \binom{48}{5}$. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με $\frac{\binom{52}{5} - \binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 1 - \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}$
- (β) Αφού θέλουμε ακριβώς δύο βαλέδες στο χέρι μας, αρχικά πρέπει να επιλέξουμε 2 από τους 4 βαλέδες της τράπουλας (με $\binom{4}{2}$ τρόπους) και ύστερα αρκεί να επιλέξουμε τα υπόλοιπα δυο χαρτιά μας από την υπόλοιπη τράπουλα (χωρίς τους βαλέδες). Οι τρόποι να το κάνουμε αυτό είναι $\binom{48}{2}$. Δηλαδή συνολικά οι τρόποι να έχουμε 2 βαλέδες είναι $\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{2}$. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{2}}{\binom{52}{5}}$
- (γ) Αρχικά επιλέγουμε ένα από τα τέσσερα είδη (κούπα, καρό, σπαθί, μπαστούνι), από το οποίο θα έχουμε 3 χαρτιά. Προφανώς αυτό γίνεται με $\binom{4}{1} = 4$ τρόπους. Στην συνέχεια επιλέγουμε 3 χαρτιά από αυτό το είδος, δηλαδή επιλέγουμε 3 χαρτιά από τα 13 του ίδιου είδους, με $\binom{13}{3}$ τρόπους. Τα άλλα δύο χαρτιά μας πρέπει να ναι διαφορετικού είδους, άρα πρέπει να επιλέξουμε δύο είδη (ένα για κάθε χαρτί) από τα υπόλοιπα τρία είδη, με $\binom{3}{2}$. Τέλος πρέπει να επιλέξουμε ένα χαρτί από καθένα είδος, με $\binom{13}{1}$ τρόπους για καθένα από τα δύο χαρτιά. Συνολικά λοιπόν έχουμε $\binom{4}{1} \cdot \binom{13}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1}$ τρόπους.

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{13}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1}}{\binom{52}{5}}$