ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Φροντιστήριο 2

Άσκηση 1

Τρεις εργάτες, οι Α,Β,Γ εργάζονται σε μια βιοτεχνία. Από ένα συγκεκριμένο είδος συσκευών, ο Α κατασκευάζει το 50%, ο Β το 30%, ο Γ το 20%. Από τις συσκευές που κατασκευάζει ο Α, το 2% βγαίνουν ελαττωματικές. Τα αντίστοιχα ποσοστά για τους Β και Γ είναι 3% και 5%. Αγοράζουμε μια συσκευή και είναι ελαττωματική. Βρείτε την πιθανότητα να την έχει κατασκευάσει ο Α.

Λύση
Έστω τα ενδεχόμενα:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{μια συσκευή έχει κατασκευαστεί από τον Α}\} \\ B &= \{\text{μια συσκευή έχει κατασκευαστεί από τον Β}\} \\ \Gamma &= \{\text{μια συσκευή έχει κατασκευαστεί από τον Γ}\} \\ E &= \{\text{μια συσκευή είναι ελαττωματική}\} \end{aligned}$$

Άρα ξέρουμε ότι

$$P(A) = 0.5\ , P(B) = 0.3\ , P(\Gamma) = 0.2\ , P(E \mid A) = 0.02\ , P(E \mid B) = 0.03 \text{ και } P(E \mid \Gamma) = 0.05$$

Ψάχνω την πιθανότητα $P(A \mid E)$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Bayes έχουμε:

$$\begin{aligned} P(A \mid E) &= \frac{P(E \mid A) \cdot P(A)}{P(E \mid A) \cdot P(A) + P(E \mid B) \cdot P(B) + P(E \mid \Gamma) \cdot P(\Gamma)} \\ &= \frac{0.02 \cdot 0.5}{0.02 \cdot 0.5 + 0.03 \cdot 0.3 + 0.05 \cdot 0.2} \approx 0.34 \end{aligned}$$

Άσκηση 2

Μια φιλή Βεδουίνων ψάχνει να βρει νερό στην έρημο. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούν το σοφό της φυλής, ο οποίος με την εμπειρία του και το μαγικό ραβδί του μπορεί να εντοπίζει το νερό με πιθανότητα 0.93, δηλαδή αν υπάρχει νερό σε ένα σημείο θα το βρει με πιθανότητα 93%. Επίσης, ο σοφός κάνει λάθος και λέει ότι βρήκε νερό όταν δεν υπάρχει νερό στο 12% των περιπτώσεων. Έστω η εκ των προτέρων (α πριορι) πιθανότητα ύπαρξης νερού σε οποιοδήποτε σημείο στην έρημο είναι 0.05.

α) Αν κάποια στιγμή ο σοφός φωνάξει «βρήκα νερό», ποιά η πιθανότητα πραγματικά να υπάρχει νερο;

β) Αν φωνάξει «δεν υπάρχει νερό εδώ», ποιά η πιθανότητα πραγματικά να μην υπάρχει νερό;

Λύση
Έστω A το ενδεχόμενο υπάρχει νερό και N το ενδεχόμενο ο σοφός να πει ότι βρήκε νερό. Ισχύουν:

$$P(N|A) = 0.93,\ P(N|A^c) = 0.12,\ P(A) = 0.05$$

$$P(N) = P(N|A)P(A) + P(N|A^c)P(A^c) = 0.93 \cdot 0.05 + 0.12 \cdot 0.95 = 0.1605$$

$$P(A|N) = \frac{P(N|A)P(A)}{P(N)} = \frac{0.93 \cdot 0.05}{0.1605} = 0.2897,$$

$$P(A^c|N^c) = \frac{P(N^c|A^c)P(A^c)}{P(N^c)} = \frac{(1-P(N|A^c)P(A^c))}{(1-P(N))} = \frac{(1-0.12)0.95}{1-0.1605} = 0.996$$

Άσκηση 3

Μας δίνονται 2 πειραγμένα νομίσματα, εκ των οποίων το ένα φέρνει κεφαλή με πιθανότητα $1/3$ και το άλλο φέρνει κεφαλή με πιθανότητα $2/3$. Τα δύο νομίσματα φαίνονται να είναι πανομοιότυπα: δεν μπορούμε να τα ξεχωρίσουμε εξ όψεως. Ρίχνουμε τα δύο νομίσματα από μία φορά το καθένα διαλέγοντας στην τύχη (με πιθανότητα $1/2$) ποιο θα ρίξουμε πρώτο. Ορίζουμε τα γεγονότα $H_i =$\{η $i-$οστή ρίψη φέρνει κεφαλή\}, $i = 1, 2$. Ορίζουμε το γεγονός $A =$\{το κέρμα με πιθανότητα κεφαλής $1/3$ ρίχνεται πρώτο\}.

α) Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(H1)$ και $P(H2)$

β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(H1 \cap H2)$

γ) Χαρακτηρίστε την ανεξαρτησία των $H1$ και $H2$, ανάλογα αν γνωρίζουμε ποιο κέρμα επιλέχθηκε πρώτο ή όχι.

Λύση

α) Χρησιμοποιώντας αυτή τη διαμέριση του δειγματοχώρου, εφαρμόζουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας:

$$P(H1) = P(H1, A) + P(H1, A^c) = P(H1|A)P(A) + P(H1|Ac)P(A^c) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ .$$

Ομοίως:

$$P(H2) = P(H2|A)P(A) + P(H2|A^c)P(A^c) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ .$$

β)

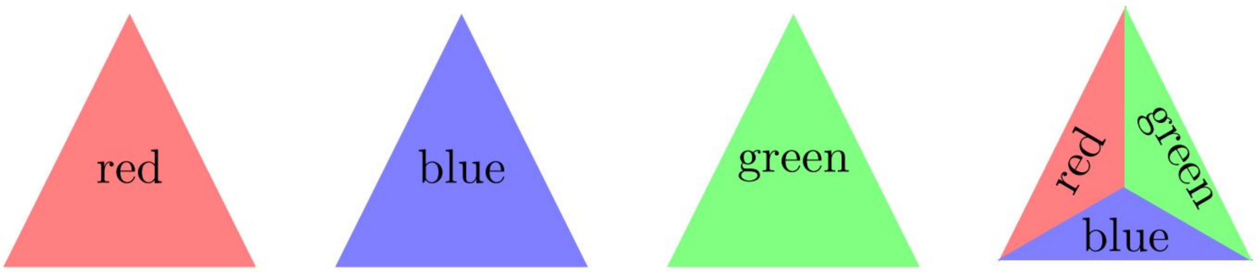
$$\begin{aligned} P(H1 \cap H2) &= P(H1 \cap H2|A)P(A) + P(H1 \cap H2|A^c)P(A^c) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{2}{9}\ . \end{aligned}$$

γ) Από τα παραπάνω έχουμε ότι $P(H1 \cap H2|A) = \frac{2}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = P(H1|A)P(H2|A)$. Άρα τα γεγονότα $H1$ και $H2$ είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητα αν ξέρουμε ποιο νόμισμα ήρθε πρώτο.

Όμως, $P(H1 \cap H2) = \frac{2}{9} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(H1)P(H2)$. Συνεπώς, τα γεγονότα $H1$ και $H2$ δεν είναι ανεξάρτητα.

Άσκηση 4

Ένα τετράεδρο έχει τις 4 πλευρές του βαμμένες όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μια είναι βαμμένη όλη κόκκινη, μια είναι μπλέ, μια πράσινη και μια βαμένη κόκκινη, μπλέ και πράσινη.



Ρίχνουμε το τετράεδρο και η πιθανότητα μια οποιαδήποτε πλευρά του να ακουμπάει στο πάτωμα είναι ίση με $\frac{1}{4}$. Ορίζουμε τα εξής γεγονότα:

$$\begin{aligned} R &= \{\text{Η πλευρά που ακουμπάει στο πάτωμα περιέχει το κόκκινο χρώμα}\} \\ B &= \{\text{Η πλευρά που ακουμπάει στο πάτωμα περιέχει το μπλέ χρώμα}\} \\ G &= \{\text{Η πλευρά που ακουμπάει στο πάτωμα περιέχει το πράσινο χρώμα}\} \end{aligned}$$

(α) Υπολογίστε τις πιθανότητες των γεγονότων R, B, και G.

(β) Είναι τα γεγονότα R, B, και G ανα δύο ανεξάρτητα;

(γ) Είναι τα γεγονότα R, B, και G ανεξάρτητα;

Λύση

(α) Προφανώς, $P(R) = P(B) = P(G) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ καθώς 2 στις 4 πλευρές του τετράεδρου περιέχουν κόκκινο, μπλέ ή πράσινο χρώμα.

(β) $P(R \cap G) = P(G \cap B) = P(B \cap R) = \frac{1}{4}$ καθώς μόνο η τέταρτη πλευρά περιέχει ταυτόχρονα 2 χρώματα. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} P(R \cap G) &= \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(R) \cdot P(G) \\ P(G \cap B) &= \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(G) \cdot P(B) \\ P(B \cap R) &= \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(B) \cdot P(R) \end{aligned}$$

άρα τα γεγονότα R, B, G είναι ανεξάρτητα ανά δύο.

Εναλλακτικά:

$$\begin{aligned} P(R|G) &= \frac{1}{2} = P(R) \\ P(G|B) &= \frac{1}{2} = P(G) \\ P(B|R) &= \frac{1}{2} = P(B) \end{aligned}$$

Προσέξτε ότι, εφόσον τα ενδεχόμενα R, G, B μπορούν να συμβούν και τα τρία στην περίπτωση της 4ης έδρας, δεν διαμερίζουν πλήρως τον δειγματοχώρο (αφού δεν είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους) και άρα το άθροισμα των από κοινού πιθανοτήτων τους δεν ισούται με 1!

(γ)

$$P(R \cap B \cap G) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = P(R) \cdot P(B) \cdot P(G) \; .$$

Εναλλακτικά:

$$P(R \cap B|G) = \frac{P(R \cap B \cap G)}{P(G)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} = P(R \cap B) \; .$$

Επομένως τα γεγονότα R, B, G δεν είναι ανεξάρτητα.