

Άσκηση 1

Απλοποιείστε τα παρακάτω σύνολα:

(α) $[1, 4] \cap ([0, 2] \cup [3, 5])$

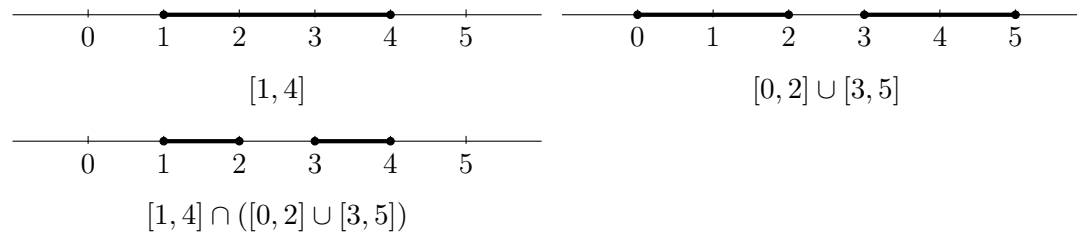
(β) $([0, 1] \cup [2, 3])^c$

(γ) $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-1/n, 1/n)$

(δ) $\bigcup_{n=1}^{\infty} (5, 8 - (2n)^{-1})$

Λύση

(α) Μπορούμε να αναπαραστήσουμε τα σύνολα ως εξής:



Άρα, $[1, 4] \cap ([0, 2] \cup [3, 5]) = [1, 2] \cup [3, 4]$

(β) Μπορούμε να αναπαραστήσουμε τα σύνολα ως εξής:



Άρα, $([0, 1] \cup [2, 3])^c = (-\infty, 0) \cup (1, 2) \cup (3, \infty)$

(γ) Αν αντικαταστήσουμε για $n = 1, 2, 3, \dots$ το σύνολο έχει τη μορφή:

$$(-1, 1) \cap (-1/2, 1/2) \cap (-1/3, 1/3) \cap \dots$$

Παρατηρούμε ότι κάθε νέο σύνολο είναι υποσύνολο του προηγούμενου του. Δηλαδή, όσο το n πλησιάζει το άπειρο η τομή των συνόλων θα πλησιάζει το μηδέν. Άρα, $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-1/n, 1/n) = \emptyset$.

(δ) $\bigcup_{n=1}^{\infty} (5, 8 - (2n)^{-1}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (5, 8 - 1/2n)$.

Αν αντικαταστήσουμε για $n = 1, 2, 3, \dots$ το σύνολο έχει τη μορφή:

$$(5, 8 - 1/2) \cup (5, 8 - 1/4) \cup (5, 8 - 1/6) \cup \dots$$

Παρατηρούμε ότι κάθε νέο σύνολο θα είναι υπερ-σύνολο του προηγούμενου του, αφού καθώς το $n \rightarrow \infty$, το $1/2n$ τείνει στο 0. Άρα, $\bigcup_{n=1}^{\infty} (5, 8 - (2n)^{-1}) = [5, 8]$.

Άσκηση 2

Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες χρησιμοποιώντας διαγράμματα *Venn*. Σημειώστε ότι η διαφορά ισούται με $F - G = F \cap G^c$ και η συμμετρική διαφορά ως $F \Delta G = (F - G) \cup (G - F)$.

(α) Αποδείξτε ότι $F \cup G = F \cup (G - F)$

(β) Αποδείξτε ότι $F = (F - G) \cup (F \cap G)$

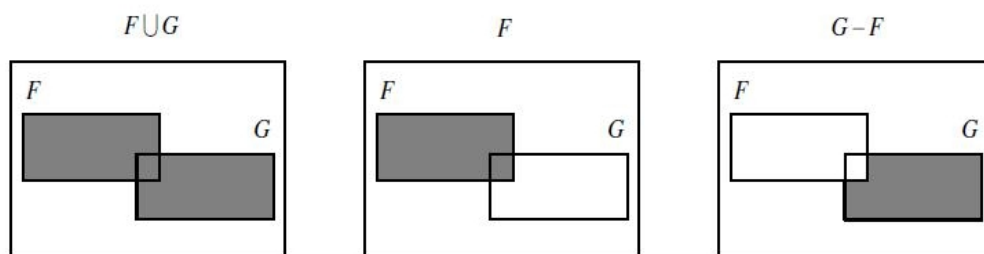
(γ) Γράψτε το $F \cup G$ σαν ένωση τριών ξένων συνόλων. Χρησιμοποιήστε τα δύο προηγούμενα ερωτήματα.

(δ) Αποδείξτε ότι $F \cap G = (F \cup G) - (F \Delta G)$

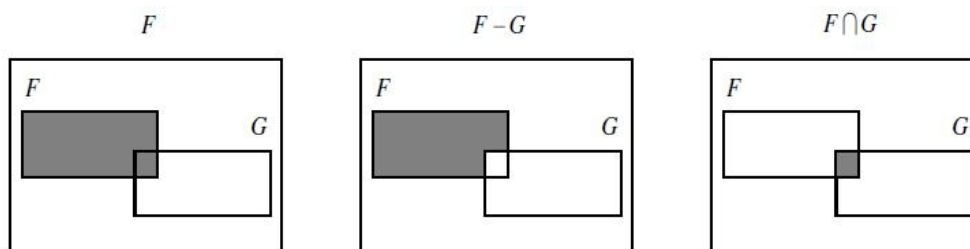
Λύση

Τα διαγράμματα *Venn* που εμφανίζονται στα σχήματα 1,2 και 3 αντιστοιχούν στα ερωτήματα α, β και δ.

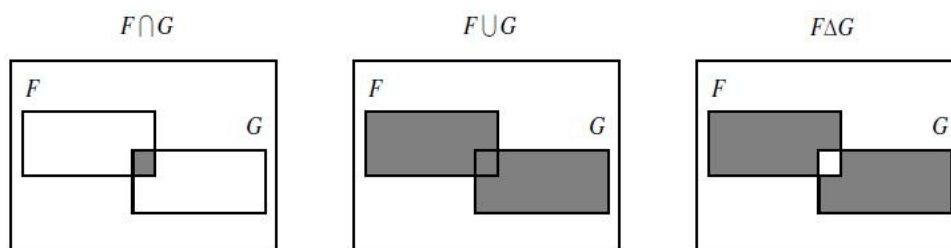
Για το ερώτημα γ, η πιθανότητα $P(F \cup G)$ μπορεί να εκφραστεί σαν $P(F - G) + P(G - F) + P(F \cap G)$.



Σχήμα 1: Διάγραμμα *Venn* του προβλήματος 1(α)



Σχήμα 2: Διάγραμμα *Venn* του προβλήματος 1(β)



Σχήμα 3: Διάγραμμα *Venn* του προβλήματος 1(δ)

Άσκηση 3

Αν A, B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = 2x$ και $P(A \cup B) = 4x^2 + \frac{3}{4}$, να βρεθεί ο $x > 0$.

Λύση Ξέρουμε ότι:

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

Επομένως αντικαθιστώντας τα δεδομένα της άσκησης, έχουμε:

$$4x^2 + \frac{3}{4} \leq \frac{1}{2} + 2x$$

$$16x^2 + 3 - 2 - 8x \leq 0$$

$$16x^2 - 8x - 1 \leq 0$$

$$(4x - 1)^2 \leq 0$$

Άρα αναγκαστικά :

$$(4x - 1)^2 = 0$$

$$4x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{4}$$

(Μάλιστα παρατηρώ ότι A, B ασυμβίβαστα, αφού $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.)

Άσκηση 4

(i) Ένα μαγαζί με σουβενίρ δέχεται πληρωμές σε ευρώ ή δολάρια και δε διαθέτει μηχανήμα POS. 24% των πελατών έχουν μαζί τους ευρώ, 61% δολάρια και 11% και ευρώ και δολάρια. Τι ποσοστό των πελατών έχει στη διάθεσή του χρήματα με τα οποία να μπορεί να πληρώσει στο συγκεκριμένο κατάστημα;

(ii) 60% των εργαζομένων σε μία εταιρεία δε φορούν ούτε σκουφί ούτε κασκόλ. 20% φορούν σκουφί και 30% φορούν κασκόλ. Αν διαλέξουμε στην τύχη έναν εργαζόμενο, ποια η πιθανότητα αυτός να φορά:

(α) ένα σκουφί ή ένα κασκόλ (ή και τα δύο);

(β) ένα σκουφί και ένα κασκόλ;

Λύση (i) Διαλέγουμε τυχαία έναν πελάτη. Έστω E το γεγονός ότι ο πελάτης έχει μαζί του ευρώ και Δ το γεγονός ότι έχει μαζί του δολάρια.

$$P(E \cup \Delta) = P(E) + P(\Delta) - P(E\Delta) = 0.24 + 0.61 - 0.11 = 0.74$$

Επομένως, 74% των πελατών μπορεί να πληρώσει στο συγκεκριμένο κατάστημα.

(ii) Έστω Σ το γεγονός ένας εργαζόμενος να φορά σκουφί και K να φορά κασκόλ.

$$(\alpha) P(\Sigma \cup K) = 1 - P(\Sigma^c K^c) = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$(\beta) P(\Sigma \cup K) = P(\Sigma) + P(K) - P(\Sigma K) = 0.2 + 0.3 - P(\Sigma K)$$

Έτσι, $P(\Sigma K) = 0.1$

Άσκηση 5

Έστω A, B, C ανθαίρετα γεγονότα του δειγματικού χώρου S . Αποφασίστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες είναι λάθος.

α) $(A - B) \cup B = (A \cap B^c) \cup B = B$

β) $(A \cup B) - A = (A \cup B) \cap A^c = B$

γ) $(A \cap B) \cap (A - B) = (A \cap B) \cap (A \cap B^c) = \emptyset$

δ) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$

Λύση

α) Λάθος.

$$(A - B) \cup B = (A \cap B^c) \cup B = (A \cup B) \cap (B^c \cup B) = (A \cup B) \cap S = A \cup B$$

β) Λάθος.

$$(A \cup B) - A = (A \cup B) \cap A^c = (A \cap A^c) \cup (B \cap A^c) = \emptyset \cup (B \cap A^c) = B \cap A^c = B - A$$

γ) Σωστό.

$$(A \cap B) \cap (A - B) = (A \cap B) \cap (A \cap B^c) = A \cap (B \cap B^c) = A \cap \emptyset = \emptyset$$

δ) Σωστό.

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = [(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap B) \cup (B \cap C)] \cap (C \cup A) = [(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup B \cup (B \cap C)] \cap (C \cup A) \quad (*)$$

Όμως, αν $A_1 \subseteq A_2$ τότε $A_1 \cup A_2 = A_2$ και $A \cap B, B \cap C \subseteq B$ άρα:

$$(*) = [(A \cap C) \cup B] \cap (C \cup A) = ((A \cap C) \cap C) \cup (B \cap C) \cup ((A \cap C) \cap A) \cup (B \cap A) = (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C) \cup (B \cap A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$$